This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A. L. Crelle.

ÜBER
COMBINATORISCHE
ANALYSIS
UND
DERIVATIONS-CALCUL

EINIGE FRAGMENTE

GESAMMELT

UND ZUM DRUCK BEFÖRDERT

VON

CARL FRIEDRICH HINDENBURG.

Leipzig

im Schwickertschen Verlage. 1803.

182. f. 7.

Den beyden

französischen Bürgern

Christian Kramp

Professor der Chemie und Experimentalphysik bey der Centralschule zu Köln

und

Iohann Carl Burckhardt

adjungirten Astronomen

bey dem Längen-Bureau zu Paris

wie auch

dem Professor der Philosophie

Heinrich August Rothe

zu Leipzig

den eifrigen Bearbeitern und Beförderern der combinatorischen Analysis

widmen

diese Sammlung

fragmentarischer

Aufsätze und Abhandlungen

zu Bezeugung

ihrer Freundschaft und Hochachtung

die Verfasser

Vorbericht des Herausgebers.

Die französischen Aufsätze, mit welchen diese Schrift beginnt, sind mir auf mein Ersuchen von ihrem Verfasser, dem Herrn Professor Bürmann zu Mannheim, zum Einrücken in die dritte Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen zugeschickt worden. Da die Ausfertigung der Sammlung voritzt nicht statt haben konnte, so folgen sie hier, um solche dem Publikum nicht länger vorzuenthalten, da sie schon seit geraumer Zeit in meinen Händen sind.

Bürmann's Vorhaben, die combinatorische Analysis den Ausländern bekannter zu machen und nachdrücklich zu empfehlen, ist den Lesern jener Sammlungen aus dem Vorberichte zur zweyten bereits bekannt. Die umständliche Ausführung desselben ist einem besondern Werke: *Traité d'Analyse fonctionnaire-combinatoire*, vorbehalten, welches sein Verfasser nun bald herauszugeben gedenkt, und wovon hier vorläufig eine ausführliche Inhaltsanzeige mitgetheilt worden ist. Diese, so wie die Aufsätze selbst (sämmtlich Bruchstücke des ebengenannten gröfsern

Werks) zeigen deutlich, was und wieviel man sich davon zu versprechen habe.

Bürmann's Empfehlung der combinatorischen Methode und ihrer Anwendung auf die Analysis ist von bedeutender Wichtigkeit. Dieser vortreffliche Analyst war nämlich anfangs ganz dawider eingenommen, und sahe die combinatorischen Darstellungen, in Beziehung auf die Analysis, für ein blofses Spiel des Witzes an, mit welchem sich abzugeben der Mühe nicht lohne. Der Rath eines einsichtsvollen vertraulichen Freundes veranlafste ihn in der Folge zu einer scharfen Prüfung; die Sache bestand diese Prüfung vollkommen; die Vorurtheile schwanden; die falschen Vorstellungen machten beffern Überzeugungen Platz; und — was den Erfolg jener unpartheyischen Untersuchung von allen Seiten bestätigte und auf immer sicherte — Bürmann fand nachher oft Gelegenheit die Methode, bey seinen Vorlesungen praktisch zu prüfen, und ihren Werth und Nutzen durch wirkliche Anwendung zu bewähren. Von der Zeit an glaubte der biedere wackere Mann es der guten Sache schuldig zu seyn, zu schnellerer Bekanntmachung und weiterer Verbreitung dieses neuen Zweiges der Analysis, auch von seiner Seite, vornehmlich durch französische, im Auslande mehr gelesene, Aufsätze mitzuwirken.

Bürmann's innige, jedem Kenner sogleich einleuchtende, Bekanntschaft mit dem Gegenstande; sein philosophischer Überblick des Ganzen; die hin und wieder von ihm eingestreuten,

eben so wahr als shön ausgedrückten Bemerkungen, gereichen diesen, obschon fragmentarischen, Aufsätzen, zu vorzüglicher Empfehlung, und machen das Lesen und Studiren derselben anziehend und interessant. Die Hauptabsicht geht dahin: „Die Functionen-Analysis „mit der combinatorischen zu verschwis„tern, beyde in die engste Verbindung mit einan„der zu setzen, und dabey eine neue, äufserst „leichte, beyderley Functionen aufs deutlichste „von einander unterscheidende, Bezeichnung ein„zuführen.“ Es wird nicht überflüfsig seyn, einige zerstreute, diese verschwisternde Vereinigung betreffende, Aeufserungen zu sammeln, und mit Bürmann's eigenen Worten, in einer freyen Übersetzung, hier aufzuführen:

„Die combinatorische Methode ist „eine der wenigen wahrhaft allgemeinen: aus „einer geringen Anzahl einfacher Voraussetzun„gen flieſst ein unerschöpflicher Reichthum nütz„licher Folgen. Ihr Einfluſs auf die Ana„lysis ist besonders wichtig, und erweitert ihren „Wirkungskreis ungemein. Die combinato„rische Analysis realisirt die Functionalaus„drücke auf die möglichst directe Art. Ohne „ihre Beyhülfe würden die groſsen weitläuftigen „Formeln der letztern nicht selten, den unge„heuern ägyptischen Pyramiden gleich, mehr „Anspruch auf unsere Bewunderung als auf un„sere Erkenntlichkeit machen; ohne sie würde „der Functionalcalcul ein Chaos von Reductio„nen darstellen, die auch den entschlossensten

„herzhaftesten Rechner ermüden würden. Die „Differential-Analysis, die seit länger als einem „Iahrhunderte so viele Wunder gewirkt und her„vorgebracht hat, führt geschwind zu Haupt„resultaten, welche die combinatorische hinter„her weiter bearbeitet und entwickelt. Daher „die Nothwendigkeit, beyde innigst mit einander „zu vereinigen; um so mehr, da ihre Trennung „der einem wie der andern nachtheilig ist. Nur „dadurch, dafs man beyde aufs vollkommenste „mit einander amalgamirt, kann man den grofsen „Methoden die Vollkommenheit geben, deren „sie fähig sind. Ohne diese Vereinigung gehen, „wie die Erfahrung lehrt, bey den Evolutionen „der Functionen in Reihen, und den Involutio„nen der Reihen in Functionen, das Gesetz der „allgemeinen und die Simplicität der summato„rischen Glieder gewöhnlich verlohren. Die ein„fache Darstellung dieser Glieder von oft sehr „verwickelten Reihen, gehört mit zu den Vor„zügen der combinatorischen Analysis. Bey dem „directen Wege, auf welchem sie zum Ziele „gelangt, sind ihre Verfahren nicht weniger „streng und analytisch als die der Differen„tialmethode. Zuweilen vervielfältigt sie die „Ansichten und Auflöfsungen, und stellt, in „schwierigen Fällen, mehrere schätzbare Hülfs„mittel auf, die dem Geiste, durch das Gefühl „seiner Kräfte belebt, den Muth einflöfsen, wei„ter zu forschen. Alles beruht dabey auf „den arithmographischen, lexikographi„schen, stelegraphischen Anordnungen;

„auf den — rein-combinatorischen Involutionen und Evolutionen. Diese geben „die Grundlage zu einer *Arithmétique universelle* „*ordinale*, zu einem *Calcul ordinal* — charakteristische Benennungen, die BÜRMANN der combinatorischen Analysis neuerlich beygelegt hat; „den Zusatz *ordinal* in der ausgedehntesten Bedeutung des Worts, als Beywort von *ordre*, „genommen. — Dadurch erhebt sich die combinatorische Methode mit ihren Ordnungsgesetzen zu dem Range einer independenten Wissenschaft, die aber gleichwohl, bey „aller Unabhängigkeit von der gewöhnlichen analytischen, ihr keineswegs fremd, sondern vielmehr „recht eigentlich dazu qualificirt ist, die engste „Verbindung mit ihr einzugehen. Alles löst „sich zuletzt in eine sprechende combinatorische Tachygraphie auf, wo das Auge „mit einem Überblick das Ganze mit allen seinen „Theilen fafst; der Erfolg einer ausdruckvollen „symbolisch-combinatorischen Zeichnung, die einem umständlichen verbalen „Vortrage allemal weit vorzuziehen ist.“

So viel von BÜRMANN's Aeusserungen über die Vereinigung der Functionen-Analysis mit der combinatorischen. Anlangend die von ihm dabey einzuführende neue Bezeichnung, so mufs ich mich auf das in meinem Vorberichte zur zweyten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen und noch ausführlicher hier in den Anmerkungen zu BÜRMANN's *Essai de caractéristique combinatoire* darüber Gesagte berufen

fen. Hier will ich nur so viel erinnern, daſs Bürmann für seine Zeichen eine solche Einrichtung zu treffen gesucht hat, daſs arithmetische, analytische, combinatorische, Ziffern und Zahlen oder Functionen, ohne Zweydeutigkeit und ohne besondere Nachweisung, im Calcul unter einander gemischt, leicht und sicher unterschieden, auch allen analytischen Operationen unterworfen werden können, und so combinatorische Evolutionen, Reversionen, Interpolationen, u. s. w. Differentiationen, Integrationen, sich darstellen lassen. Seine combinatorischen Zeichen z. B. sind sehr einfach und blos auf die beyden Formen ⌐ und [, mit ihren bestimmten Abzeichen für die nöthigen Modificationen (das erste für die Sätze, das zweyte für ihre combinatorische Bearbeitung) eingeschränkt. Von diesen Zeichen kommt in den Abhandlungen hier nichts vor, weil sie sich mit ihren Abzeichen durch gewöhnliche Typen nicht darstellen lieſsen; auch muſs man nicht vergessen, was Bürmann am Schlusse seines *Polynome - Combinatoire* selbst erinnert, daſs das, was hier im Drucke an ihrer Stelle steht, nur ein höchst unvollkommenes Surrogat sey, das sich mit jenen viel vollkommnern Zeichen gar nicht messen darf. Inzwischen ist zu rathen, beym Lesen des *Polynome* sich anfänglich die Zeichen und ihre Bedeutungen, so wie sie nach und nach vorkommen, auf ein besonderes Blatt aufzuschreiben, um sie sogleich in der Folge, wo sie

wieder erscheinen, richtig verstehen und auslegen zu können. Etwas Aehnliches gilt von den combinatorischen Operationen und Involutionen, die man am besten mit der Feder in der Hand verfolgt. Das aufmerksame Abschreiben und Wiederholen einiger gut gewählten Beyspiele, sagt BÜRMANN, machen mit den combinatorischen ganz einfachen Regeln und Verfahren weit schneller vertraut, als wenn man es blos bey den verbalen, noch so aufmerksam durchlesenen, Vorschriften bewenden läfst. Man wird wohl thun, wenn man diese praktische Übung bald in Zahlen, bald in Buchstaben, versucht. Eine geringe Aufmerksamkeit bey einer mehrmaligen Handanlegung, wird die Regeln, oft ohne alle wörtliche Nachweisung, die, um bestimmt zu seyn, nicht immer kurz seyn können, leicht finden lassen. Es ist eine schöne Eigenschaft der combinatorischen Analysis, setzt dieser vortrefliche Beobachter hinzu, aus blofsen combinatorischen Entwürfen und ihrer Anordnung in Tafeln, durch blofse anschauliche Darstellung ihrer Ordnungsgesetze, sich selbst zu lehren.

Meine Anmerkungen zu dem *Essai de caractéristique combinatoire* sind theils erläuternd, theils geben sie weitere Nachweisungen, zuweilen selbst aus BÜRMANN's Briefen. Manches daraus kann auch als Nachweisung beym *Polynome - Combinatoire* gebraucht werden, z. B. wenn man etwas ausführlicher zu wissen verlangte, was es mit der *Involution Lexicographique* (Seite 94) *mit der Involution literale* directe

(S. 96) mit der *Involution permutée* (S. 99) für Bewandnis habe; wo man die in meinen Anmerkungen dafür citirten Stellen leicht finden und nachschlagen könnte. BÜRMANN durfte in diesen Aufsätzen nach seinem Plane nicht anders als kurz seyn und konnte sich daher auf eine detaillirte Auseinandersetzung solcher combinatorischer Formen nicht einlassen. Freylich sollten diese Anmerkungen, wie der Aufsatz zu dem sie gehören, französisch geschrieben seyn. Wenn man aber die Schwierigkeiten nicht verkennen kann, die jeden Vortrag in einer fremden Sprache begleiten, in welcher man sich die gehörige Fertigkeit, durch lange anhaltende Übung nicht erworben hat: so wird man es gewifs verzeihlich finden, dafs es in gegenwärtigem Falle, und bey einem solchen Texte, nicht geschehen ist.

So viel, von BÜRMANN's Aufsätzen und ihren Verhalten zu seinem gröfsern *Traité d'Analyse fonctionnaire-combinatoire*, der gröfstentheils den Reihen und ihrer verbesserten Behandlung gewidmet ist.

Einen ähnlichen Vorsatz, durch Erweiterung der Theorie der Functionen und des Differentialcalculs die Analysis der Reihen zu vervollkommnen, insbesondere schwere Untersuchungen verwickelter Gegenstände zu erleichtern, weitläuftige, nicht selten sehr beschwerliche dabey vorkommende Operationen und Rechnungen abzukürzen, und verschiedene Zweige der Analysis mit einander in nähere Verbindung zu bringen, hat ARBOGAST, Mitglied des französischen

Nationalinstituts und Professor der Mathematik zu Strasburg, ohnlängst ausgeführt. Dabey hat er einen eigenen, von allen bisher bekannten ganz verschiedenen, Weg eingeschlagen; wie aus seinem neuerlich (1800) zu Strasburg herausgegebenen schätzbaren und interessanten Werke: *Du Calcul des Dérivations* erhellet. Seine Rechnungsmethode gründet sich auf die durchgängige Voraussetzung, zusammengehörige Gröfsen als von einander derivirend zu betrachten; wobey er zugleich den Begriff von analytischer Derivation erweitert und ihn auf jede willkührlichen, von einander ganz unabhängigen, Gröfsen a, b, c, d, ... (dergleichen die Coefficienten der Glieder der Reihen darstellen) und ihre verschiedene Zusammensetzung erstreckt, auch solche als veränderlich und von einander derivirend angesehen hat, so unabhängig von einander sie übrigens an sich seyn mögen.

Wie dabey die Glieder der entwickelten Functionen von einander abgeleitet werden; wie z. B. bey Evolution der Function

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})$$

(wo offenbar das erste Glied $= \varphi\alpha$) die Coefficienten der übrigen, in zusammengesetzten derivirten Gröfsen (*Dérivées*) von $\varphi\alpha$; und diese wieder in einfache von $\varphi\alpha$ und zusammengesetzte von β, β^2, β^3... sich zerlegen; die letztern aber endlich in die ganz einfachen β, γ, δ, ε... und ihre Zusammensetzungen sich auflöfsen lassen; — dafür will ich das in meinem Aufsatze (hier No. V) darüber *Gesagte* itzt nicht wieder-

holen. BÜRMANN's consecutiv Functionen f^1, f^2, ... f^n, sind ungefähr das, was ARBOGAST 1ste, 2te,... nte Derivirte nennt.

Die Evolution der Functionen in Reihen macht die Grundlage des ganzen Werks aus. Der Ursprung und die Anwendung der Derivationen zeigt sich hier am deutlichsten; einzelne Formeln und Sätze davon finden in der Folge durchgängig ihre Anwendung; auch fällt, worinn die combinatorischen und derivativen Verfahren von einander verschieden sind, worinn sie mit einander übereintreffen, nirgends so klar als hier in die Augen. Ein grofser Theil meiner Abhandlung ist daher mit Vergleichung der beyderley Methoden beschäftigt. Die dabey vorkommenden derivativen Zeichen habe ich erklärt, die combinatorischen aber als bekannt vorausgesetzt, um so mehr, da selbige schon vorher von BÜRMANN, in seinen Noten zu seinem *Polynome-Combinatoire* aufgeführt und mit den seinigen verglichen worden sind.

Der Derivationscalcul als allgemeine, die Theorie der Functionen (mit welcher er in der innigsten Verbindung steht) so wie die Gränzen der Differentialrechnung (deren er sich als Instrument bedient) erweiternde Methode, ist vortrefflich und vielumfassend; die Anwendung dieses Calculs auf mehrere interessante und schwierige Untersuchungen, seine Erstreckung auf Functionen zusammengesetzter Polynomien ist wichtig. — Alles qualificirt das Werk zu einem

ernstlichen Studium jedes Analysten, dem die Erweiterung seiner Wissenschaft am Herzen liegt.

Wenn aber der scharfsinnige, gelehrte und belesene Verfasser desselben, neben dem Lobe, das er der combinatorisch-analytischen Methode in der Vorrede ertheilt, nicht undeutlich zu verstehen giebt, er habe durch den Derivationscalcul die combinatorische Analysis entbehrlich gemacht; wie aus den Worten folgender Stellen — *Les quantités polynomiales peuvent aussi se former par les combinaisons, quoique d'une façon moins facile et moins analytique, que par les Dérivations* (*Calc. des Dér. p. 4. no. 52*) — *Je n'ai fait aucun usage des combinaisons — j'ai suivi mes propres idées — les principes que j'emplois sont plus étendus — les procédés que je donne sont plus analytiques*, u. s. w. bis zu den Worten *pour former les groupes des quantités polynomiales* (*Préf. p. V. VI*) — deutlich hervorgeht: so ist das eine stillschweigende Behauptung, welcher ich laut widersprechen muſs. Der Derivationscalcul hebt den wichtigen nützlichen Gebrauch der combinatorischen Methode in der Analysis so wenig auf, daſs er ihn vielmehr nachdrücklichst bestätiget.

Wenn man, um ein sehr einleuchtendes Beyspiel zu geben, das Arbogastische Evolutionsverfahren Schritt für Schritt verfolgt, so geht am Ende folgendes Resultat unwidersprechlich hervor:

„Der Derivationscalcul führt anfänglich zu „beschwerlichen continuirlichen Differentiationen

„und Reductionen; wie die Formeln [*Cal.*
„*Der.* no. 5. 7 und 20, 21] mit ihren Anw
„gen [no. 12, 14, 16] zeigen, und ARBO
„[no. 19] selbst gesteht. Statt dieser werden
„Folge zwar leichte, dennoch aber in We
„tigkeit führende Substitutionen in Subst
„nen (durch successive Entwickelung der
„virten von β^m zu Derivirten von γ und
„Potenzen, dieser wieder zu Derivirten
„und deren Potenzen, u. s. f. bis der deri
„Charakter D aus allen Gliedern verschw
„ist) gebraucht [no. 22, 25 und p. 20, 21]
„stitutionen, deren sich der Conferenzrat
„TENS bereits bedient hat (hier S. 230-235).
„Derivationen lösen sich zuletzt in ganz
„und einfache combinatorische Ope
„nen und Involutionen auf; dahin z
„*Règles* [no. 30, 36, 43, 47] gehören,
„nen vollkommen reducirte gut
„nete Complexionen, in eben der Folge
„ander, wie bey mir, hervorgehen [die
„*pennens réduits*, p. 21]. Die analy
„Derivationen führen also hier (u
„auch bey den Producten der R
„andern Fällen), ganz unerwarte
„binatorische Anordnungen
„ren. Diese sind also unentbehrlich
„anders die endlichen Resultate mi
„Leichtigkeit herbeyführen. Merkwü
„übrigens, dafs man auf sie geleitet wi
„man die Schwierigkeiten, welche die
„ven Ausdrücke und Verfahren bey den

„*polynomiales* in den Weg legen, zu heben sucht, „und indem man, was diese noch eingewickelt „enthalten, nach und nach entwickelt.“

Das Verfahren [no. 21] zeigt die Abhängigkeit der dortigen Evolutionsformel von dem polynomischen Lehrsatze. Nachdem nun für die Glieder dieses Satzes die derivativen oder meine combinatorischen Ausdrücke gebraucht werden, nachdem ist auch jene Formel im Ausdrucke verschieden. Begreiflich hat Arbogast seine derivativen Functionen substituirt; aber hoffentlich wird man keinen Augenblick anstehen, die geschmeidigere combinatorische Formel (hier S. 203) im Gebrauche vorzuziehen.

Die combinatorischen Operationen und Involutionen sind überdies, wie ohne Schwierigkeit von selbst einleuchtet, wahre Derivationen, im strengsten Sinne des Worts, die, wie die analytischen, von einem bestimmten Anfange (*Origine*) ausgehen; aber Derivationen der einfachsten Art. Wenn man nämlich in einem analytischen Ausdrucke oder Satze alles entwickelt, auflöst, und vereinfacht, was sich entwickeln, auflösen und vereinfachen läfst: so verfällt man zuletzt nicht selten auf ganz simple, gewöhnlich combinatorische, Anordnungen und Derivationen; und das um so leichter und zuverlässiger, wenn man etwa zufälligerweise eine der (hier, S. 189, 190, Note o erwähnten, dahin führenden, Zeichnungen, besonders die bezifferte, gebraucht hätte, deren sich vorlängst mehrere Analysten bedient

haben, ohne den Übergang zu kennen, oder auch nur zu ahnden, der von hier aus in die combinatorischen Anordnungen offen steht. Was Prof. Pfaff (Arch. der Math. H. VII. S. 348) von dem Tetenschen Substitutionsverfahren sagt, es involvire etwas, den beym Combiniren erforderlichen Operationen Ähnliches, das erst noch weiter evolvirt werden müsse; das wird durch die analytischen Derivationen vollkommen bestätiget. Das letzte Resultat derselben (die *Développemens réduits*) sind combinatorische Derivationen in aller Form. Auf diese geräth die derivative Methode nur allmälig und auf Umwegen; die combinatorische bemächtigt sich ihrer auf dem kürzesten ganz directen Wege.

So weit auch Arbogast das Gebiet seiner Derivationen erstreckt und ausgedehnt, und sich dadurch ein gegründetes Recht auf den Dank aller Analysten erworben hat: so wird es doch immer, wie bey den, in meiner Abhandlung in Betrachtung gezogenen, so auch in andern Fällen, Bedürfnifs bleiben, für die analytischen verwickelten Derivationen, die correspondirenden combinatorischen leichtern aufzusuchen und in Formeln darzustellen, deren lichtvolle symbolische Zeichnung allemal mehr Deutlichkeit haben wird, als die verbalen Vorträge der Regeln für jene nicht haben können. Wie die Differentialanalysis, nach Bürmann's obiger Bemerkung, zu Hauptresultaten führt, welche die combinatorische nachher weiter bearbeitet und entwickelt;

so auch der Derivationscalcul, eine erweiterte Anwendung der Differentialrechnung. Die analytischen Derivationen sind, wie die Vergleichung zeigt, combinatorischer Art (*Combinaisons latentes*). ARBOGAST hat nämlich in seinem derivativen Verfahren, ohne vielleicht daran zu denken, eine vielbefaſsende, auf den Differentialcalcul gegründete, und dadurch mit der Theorie der Functionen zusammenhängende, COMBINATORIK aufgestellt. Vortrefflich zeigt diese den Weg, auf welchem man die Untersuchungen einleiten und zu Endresultaten gelangen kann. Aber auf jenem durch labyrinthische Gänge oft so sehr verflochtenen Wege, bey diesen nicht selten äuſserst verwickelten Resultaten, werden, um jenen zu verfolgen und diese zu realisiren, combinatorische Wegweiser und Vermittler der einfachsten Art, wenn man sie haben kann, theils als sicheres Geleite zu beſserm Fortkommen, theils als erwünschte Abkürzung und Vereinfachung, allemal von gröſstem Nutzen seyn.

Wenn nun aber die Derivationsmethode der Beyhülfe der combinatorischen, ohne Unbequemlichkeit, nicht entbehren kann; wenn selbst letztere die geschwindere Übersicht der erstern ungemein befördert, und zu deutlicherer Einsicht in ihre Verfahren verhilft, wie jeder zugeben wird, den die Erfahrung darüber belehrt hat; so ist klar, was ich oben behauptet habe: „daſs der „Derivationscalcul die combinatorische Analysis, „mit ihren Involutionen und Evolutionen, so we„nig entbehrlich macht, daſs er vielmehr ihren

„herrlichen Nutzen aufs neue kräftigst bestätigt.“ Den Einfluſs der, in ihren Gründen so einfachen, in ihrer Anwendung so leichten, Combinationslehre auf die Analysis wieder aufheben; die bereits getroffene so wohlthätige innige Vereinigung beyder, nach welcher jene dieser, von ihren ersten Anfängen an bis in die gröſsten Verwickelungen hinein, schwesterlich zur Seite geht, und ihr hülfreich die Hand bietet — diesen Einfluſs wieder aufheben, diese Vereinigung wieder trennen wollen — das hieſse, eine der lautersten, ergiebigsten Hülfsquellen für die Analysis vorsetzlich verstopfen, und in sehr vielen Fällen den kürzesten, nur allein durch directe combinatorische Verfahren (*Combinaisons manifestes*) zugänglichen Weg sich verschlieſsen.

Nicht also die Trennung der combinatorischen Methode von der differentiellen und derivativen, sondern vielmehr ihre möglichst genaue und innige Vereinigung, kann der Analysis wahrhaft nützlich seyn und ihre Gränzen erweitern. Diese Vereinigung beabsichtigt Burmann's *Traité d'Analyse fonctionnaire - combinatoire*, nach der ausdrücklichen Erklärung die dieser scharfsinnige Analyst gleich zu Anfange seines *Développement général aux Fonctions arbitraires* (hier No. II) darüber gegeben hat.

Leipzig im April 1803.

Carl Friedrich Hindenburg.

I.

ESSAI
DE
CARACTERISTIQUE COMBINATOIRE
OU
NOTATION UNIVERSELLE DÉDUITE D'ÉLÉMENS SIMPLES SYSTÉMATIQUEMENT COMBINÉS.

. . . . . ambagesque resolvit
Caeca regens filo vestigia . . . . .
Enéide, chant VI.

PAR BURMANE.

PRÉFACE.

Cet opuscule a pour but de rendre la communication des idées plus rapide et plus générale. S'il produit seulement des recherches dans une partie assez neuve encore, l'Art de la Notation, je ne regretterai pas les années, que j'ai employées à des pages.

Le titre que j'ai adopté est celui que LEIBNITZ [1]) donnait à un algèbre de raisonnement dont il parla toujours et ne publia rien. Ma Caractéristique, moins étendue en plan que celle de cet homme illustre, n'a point la métaphysique pour base: mais comme écriture immédiate des sciences du géomètre et du grammairien philosophe, elle est aussi une langue universelle, ou susceptible de le devenir. Elle se distingue de la Pasigraphie parisienne par son économie mathématique non moins que par sa briéveté.

Ses élémens graphiques sont . — | /\ ( ) ⌒ ⌣

1) Les Notes du Texte se trouvent amassées séparément en Nro. IV.

Rendre saillantes les nombreuses parties de la Caractéristique sans qu'elles cessent de faire un tout contenu, assigner à chaque chose un signe simple sans tomber dans la répétition, embrasser les besoins présens et futurs, ne pas sacrifier l'élégance des formes à leur facilité pratique; ces points de mire si différens ont rendu ma carrière trop difficile pour que je n'y ai pas trébuché. J'en invoque l'indulgence des connaisseurs sur des imperfections inévitables peut-être pour de plus habiles que moi, et je les prie de ne juger qu'un Essai.

Oserai-je compter généralement sur une lecture attentive? Je ne l'espère pas de ceux qui ne parcourent les livres que pour en relever les endroits faibles et qui croyent mieux mériter du public en se moquant de tout projet utile qu'en contribuant à son exécution. La meilleure manière de critiquer ici et partout est de fournir des améliorations et de proposer des vues nouvelles: celle-là seule obtient la reconnaissance de la postérité qui ensevelit dans l'oubli ou le mépris les censures stériles et leurs auteurs.

FONTENELLE dit au sujet de la Caractéristique de LEIBNITZ qu'outre l'art de la trouver, il eût encore fallu le plus difficile de la faire recevoir, les hommes ne s'accordant qu'à n'entendre point leurs intérets communs. Ces obstacles sont grands mais l'existence de l'Arithmétique, de l'Algèbre, de la Musique et de l'écriture chinoise prouve qu'ils ne sont pas invincibles. J'y appelle les efforts des jeunes savans dont le courage ne fixe que le terme et dont l'esprit n'est pas encore courbé sous le joug de l'habitude. Dans l'age mûr, je le sens trop par moi-même, ce qu'on sait est toujours préférable à ce qu'il faut apprendre, fût-il au fond cent fois plus aisé.

TABLE DES MATIÈRES

Première Partie

en impression avec deux planches.

PROLEGOMÈNES DE CARACTÉRISTIQUE.

Section. Sur les chiffres, écriture de l'Arithmétique.
— Sur les notes, écriture de la Musique.
— Sur l'Algèbre, écriture de l'Analyse mathématique.
— Sur les figures de la Géomètrie et de la Méchanique.
— Sur la Science des Combinaisons appliquée aux mathématiques. [2])
— Sur la même appliquée aux autres sciences par l'Idéographie.
— Sur les caractères plus ou moins arbitraires de la Géographie, de l'Astronomie, et de la Chymie, sur ceux de la Tactique et de la Danse, sur le télégraphe et les signaux en général.

Seconde Partie

toute gravée.

NOTATION COMBINATOIRE.

Section. Principes généraux d'Algèbre. [3])
— Application aux Différences directes et inverses.
— Application aux Différences nulles ou différentielles.
— Application aux Intégrales différentielles de tous les ordres, simples et partielles.
— Application aux Sommations conversionelles.

6me Section. Application aux équations fonctionnaires.

7me — Application aux formules de Méchaniqu en signes permanens.

8me — Plan général d'une Idéographie univer selle, médiatement et immédiatemen parlable.

Troisième Partie

en impression avec plusieurs planches.

MÊLANGES

1re Section. Résolution numérique (praticable) d équations de toute espèce.

2de — Remarque sur les parties précédentes additions.

3me — Instruction pour graver bientôt l'écritu à l'eau forte, seul moyen de perfectio ner la Caractéristique combinatoire.

Planches. Figures combinatoires et autres. Modèl des instrumens et apparaux du graveur l'eau forte. Modèles droits et renver d'écriture anglo-française et d'allemand tant courante que gothique, etc.

A) *PREMIERE PARTIE*

Section cinquième.

Sur la Science Combinatoire appliquée aux mathématiques et réduite en règles techniques au moyen de l'Analyse Combinatoire.

Quoique la Géométrie, l'Analyse et la Méchanique ayent, dans la contemplation de la vérité, une beauté intrinsèque qui en rend l'étude recommandable indépendamment de leur utilité pratique, il n'en est pas moins vrai que ce dernier but doit être celui de tout géomètre spéculateur, **Les mathématiques sont assez avancées, mais non leurs applications**, disait un philosophe spirituel du dernier siècle. Sa remarque est juste à cela près que les applications demeureront toujours bornées tant que les méthodes ne seront point parfaitement générales et leurs énoncés des formes simples et parlantes, Cette réduction analytico-caractéristique peut seule convertir en règles techniques l'art d'inventer, et mettre pour ainsi dire, le génie à la portée de la multitude.

A mésure que le géomètre physicien attaque des problèmes plus importans, la complication des développemens augmenta davantage, au point souvent de rendre la solution finale impossible. Pour éluder cet obstacle invincible directement, la sagacité mathématique successivement inventé divers modes abbréviatoires: tel est en gros le calcul différentiel et en particulier la notation plus ou moins féconde de certaines fonctions connectives. Mais osons le dire, cette tachygraphie algébrique ne devient universellement utile qu'a l'aide de l'Analyse Combinatoire qui réalise de la manière la plus directe les énoncés fonctionnaires. Sans elle les grandes

formules sont trop souvent dans le cas des pyramides égyptiennes, des monumens prodigieux qui ont plus de droit à l'admiration qu'à la reconnaissance.

Si un art date de ses premiers essais, l'Analyse Combinatoire est ancienne: si, comme il est plus naturel, on fixe son origine à l'époque où elle a commencé de devenir un système, on ne peut pas remonter plus haut qu'à LEIBNITZ. Ce génie transcendant, à qui nous devons tant de grandes vues, tenta le premier d'en faire une science et même une science universelle. Pour avoir trop étendu son plan, le philosophe allemand occupé d'ailleurs d'une foule d'autres objets, ne fit que peu de progrès dans sa Combinatoire et ne vit même qu'un abyme dans une de ses principales opérations, la décomposition d'un nombre en toutes ses parties entières. *) Il défricha le champ et c'est beaucoup. Les heureuses idées qu'il sema fructifièrent sous de géomètres plus modérés. BERNOULLI, MOIVRE, BOSCOWICH etc. débrouillèrent le cahos et l'abyme disparut. Mais personne n'a autant mérité ici que le Professeur HINDENBOURG à Leipsic: en convertissant les procédés combinatoires en règles techniques aussi précises et même plus faciles que celle de l'arithmétique vulgaire, en les illustrant par de nombreuses applications, et en formant une quantité de disciples distingués, ce profond géomètre doit être regardé comme le vrai père de l'Analyse Combinatoire.

En glanant sur ses pas je n'ai guère trouvé que la forme à perfectionner, ou pour mieux dire, à traduire en faveur de ceux qui n'ont point l'usage des lettres allemandes auxquelles nécessitèrent la multitude des élémens et l'impression commune. Ma notation nouvelle a sous ce rapport au moins l'approbation de HINDENBOURG lui-même. Voyez sa Zweite Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlun-

gen, Leipsic, 1800. [5]) Comme la manière dont je suis venu à ce travail peut intéresser la science en montrant combien il faut être sur ses gardes lorsqu'on juge des méthodes qu'on ne connaît qu'imparfaitement, je me permettrai quelque détail.

Ainsi que beaucoup de géomètres j'eûs longtems pour l'Analyse Combinatoire allemande une aversion qui alla jusqu'à n'en vouloir lire aucun ouvrage. [6]) Sur le conseil d'un savant ami je me familiarisai enfin avec elle et vis à ma surprise que j'avais eu tort de la mépriser sur la foi d'autrui. Pour réparer ma faute et guerir d'autres de la même prévention, je resolus d'écrire des Elémens Combinatoires français. [7]) Je m'ouvris à ce sujet il y a quelques années au Professeur HINDENBOURG qui s'empressa avec une complaisance vraiment rare de m'aider de ses lumières. Dans une correspondance suivie que nous eûmes ensemble il me donna des renseignemens précieux sur sa méthode et sur les meilleurs ouvrages combinatoires, et il y joignit la politesse de m'en envoyer une grande partie: il fit plus, il me redressa amicalement plusieurs méprises, et c'est à sa judicieuse censure que je dois des progrès que je puis avoir faits dans la Science des Combinaisons, dont cette Caractéristique n'est pas le seul résultat. Je me plais à lui en exprimer ici ma reconnaissance publique.

Mon illustre correspondant ne goûta pas tout de suite mon projet d'une notation sans lettres allemandes trop peu connues, à l'avis de plusieurs savans respectables, en France et dans tout le midi de l'Europe. Même en Angleterre et en Batavie, l'Alphabet gothique (Black Letter) confiné aux estampes et à quelques livres de réligion, diffère assez de l'imprimé allemand pour que celui ci n'y soit pas d'une lecture aisée. Une circonspection nécecsaire dans les correspondances des gens de lettres m'ayant empeché de donner à mes raisons

tout le poids que j'aurais pû, je ne m'étonne aucu
ment qu'elles n'ayent pas convaincu HINDENBOU
Encore dans le livre cité il parait douter à son désav
tage que la notation n'ait empêché son élégante méth
d'être étudiée des étrangers autant qu'elle le mérite
il cite contre moi le grand EULER [8]) dont les ouvra
classiques pleins de lettres allemandes doivent les a
rendues familières aux géomètres meridionnaux. M
en admettant, ce qui est beaucoup, cette supposition
entier, la simple lecture n'aura pas appris à tracer
caractères très difficiles par les bouts brisés des minu
les et les ornemens sinueux des majuscules qu'un f
çais ou un italien ne sait point distinguer de la le
proprement dite. Excep'é les maîtres écrivains les
mands eux mêmes ne savent pas exécuter ce type d'
pression dit Fractur: s'ils y suppléent par une n
courante commode, les étrangers, privés de cette
source, n'ont que la très précaire de se créer de sig
particuliers. Or je sais par expérience combien cette
ficulté dégoûte, et c'est pour la lever en général
j'ai entrepris cette Caractéristique Combinatoire dor
but, ou du moins le voeu, est d'universaliser les
noissances européennes en facilitant leur communica
immédiate.

La guerre et des circonstances qui n'intéressent
moi seul, ont interrompu ma correspondance avec
DENBOURG et m'ont fait remettre à des tems plus
reux pour les sciences la publication du Traité d'A
lyse Combinatoire pour lequel j'ai travaillé
matériaux. Je me borne ici à essayer le gout du
blic mathématicien par des élémens proportionnés
autres parties de ma Caractéristique et suffisans p
tant pour familiariser avec la méthode: ils contiennen

1. La combinaison arithmétique des séries
quelle construit pour un problême quelconque de d

loppement la Norme du terme-général, c'est à dire l'énoncé tachygraphique des règles combinatoires fondamentales dont le résultat exprime le terme général dans toute la simplicité possible.

2. La démonstration courte et rigoureuse des règles combinatoires fondamentales, avec des applications choisies qu'il suffit de copier quelques fois pour voir la routine de ces règles.

3. Le Polynome-Combinatoire (Polynomialsatz) [10]) ce superbe théorême, dû à HINDENBOURG, et comme l'a très bien remarqué le savant Professeur KLÜGEL, une espèce d'observatoire d'où le calculateur suit, au loin, sans jamais là perdre, la loi des développemens et renveloppemens.

4. Involutions lexicographiques appliquées aux Retours des séries, au logarithme naturel de l'infinitinome et au nombre dont l'infinitinome est le logarithme; détermination médiate et immédiate du terme général d'une suite récurrente donnée.

5. Application à quelques uns de nos énoncés différentiels, etc.

6. (Dans la troisième partie de cette Caractéristique) Notice de travaux combinatoires de HINDENBOURG, ESCHENBACH, ROTHE, BURCKHARD, PRASSE, KRAMP, des frères PFAFF, etc., etc. [11]). Table comparative des signes combinatoires allemans et des miens, [12]) en faveur de ceux qui auront appris l'Analyse Combinatoire dans ma notation. Quand on est au fait du fond, on l'est bientôt de chaque nouvelle forme.

J'ai exposé les raisons qui m'ont empêché d'admettre les lettres allemandes: elles n'auraient d'ailleurs osé trouver place dans une Caractéristique sans lettres proprement dites. Mais tout en m'écartant de la notation de HINDENBOURG, je lui dois l'éloge qu'elle est ce qu'on saurait construire de plus méthodique avec les alphabets.

Les avantages de la mienne dérivent absolument de la pleine liberté que j'ai eue en fait de signes, moyennant quoi j'ai pû rendre les termes généraux combinatoires avec plus d'unité et mieux les distinguer des fonctions analytiques ordinaires avec les quelles on peut les mêler sans équivoque. [13]) Deux symboles, ⌐ pour les énoncés et [pour les règles combinatoires, remplacent à l'aide des chiffres algébriques V X Λ et de quelques modifications locales, les dix alphabets de la notation allemande. [14]) Par une suite de mes principes caractéristiques la terminologie a essuyé la même rédaction.

Malgré cette simplification je suis loin de croire que ma notation abolira son modèle, même dans la supposition qu'un éditeur en fit exécuter des types mobiles. Dans l'empire des lettres les révolutions sont rares et surtout lentes en matière de forme. Les plus mauvaises orthographes, par exemple l'anglaise et la française, ont résisté à tous les projets par leur seule force d'inertie, c'est à dire parce qu'on y est une fois accoutumé. A plus forte raison un système savamment régulier en types existans, se soutiendra-t-il dans les pays où il est reçu. Tout ce qui pourra arriver sera que ma notation subsiste à côté de l'allemande, [15]) si tant est qu'on l'adopte. Le $\dot{x}$ de NEWTON n'a nulle part dépossédé le dx de LEIBNITZ moins élégant peut-être. Si en Angleterre, où le patriotisme s'étend trop souvent jusqu'aux sciences, on préfère le symbole Newtonien, la France, l'Italie, l'Espagne, l'Allemagne et le Nord se sont déclarés pour LEIBNITZ, leur maître commun en calcul différentiel. En Batavie où les muses sont cosmopolites comme le commerce, l'une et l'autre notation sont en usage et on s'en trouve bien. Il est bon peut-être aujourd'hui de différer, peut-être même de disputer sur ces accessoires: s'entend de manière que

le public en retire de l'utilité et que les parties ne sortent point de l'urbanité philantropique, qui doit caractériser les lettres. Sous ce point de vue ma notation pourra aussi en Allemagne propager le goût de l'Analyse Combinatoire. On comparera, on scrutera, et les nouvelles idées qui en resulteront, tourneront au profit de la science et à l'honneur des inventeurs. *Fungar vice cotis.*

Mes formes combinatoires étant, comme mes formes algébriques ordinaires, toutes en lignes droites assemblées sous les angles les plus simples, elles exigent de même peu de dextérité manuelle, et leur construction sévèrement méthodique qui les rapproche des fonctions communes sans qu'on puisse jamais les confondre avec elles, n'oblige à aucun effort de mémoire et d'attention. C'est pour soulager encore plus celles-ci que j'ai abandonné les nombreuses dénominations de LEIBNITZ et de BERNOULLI. [16]). Les amateurs d'érudition pouvant recourir aux sources, n'ont pas à s'en pleindre et les commençans m'en sauront certainement gré. Dans l'étendue actuelle de l'Analyse et des sciences en général, on ne peut trop réduire pour eux. Au reste je n'ai constamment substitué que des mots plus intelligibles immédiatement et j'ai soigneusement évité d'en employer aucun dans un sens différent de mes prédécesseurs. Avec cette précaution il n'y a pas de confusion à craindre. Je passe à des considérations moins stériles.

L'Analyse Combinatoire ne s'exerce que sur les développemens. C'est à dire sur les séries: mais le domaine de celui-ci est bien plus étendu qu'il ne parait au premier abord et presque tout s'y rapporte. Excepté quelques fractions simples, les autres ne s'employent qu'en développement. Il y a plus, en Arithmétique même tout est série. Les nombres entiers sont des séries or-

données selon les puissances de dix, [17]) une fraction est une série pareille d'une partie de l'unité. Les règles arithmétiques fondamentales n'étant que la numération considérée sous diverses faces, ne sont donc que l'art de trouver le séries décimales entières ou fractionnaires qui résultent de compositions et de decompositions prescrites de séries de même espèce.

L'Analyse algébrique est la logique qui conclut les procédés propres à déterminer une quantité au moyen d'autres, liées par certaines conditions. En Arithmétique ces procédés sont l'addition, la soustraction et leurs repétés; en Géométrie ce sont des lignes, des surfaces, des solides à construire; en Méchanique il y entre de plus le tems, le mouvement et ses conséquences. Les autres sciences mathématiques ne sont que des applications de celle-là: l'Analyse est le guide de toutes et l'Algèbre est leur écriture commune. Quelques symboles qu'on employe pour la Norme des opérations techniques qui résolvent le problème, chiffres, lettres, figures réelles ou de convention, cette norme sera dans notre sens toujours de l'Algèbre: [18]) mais une tachygraphie combinatoire dont l'oeil saisit à la fois toutes les parties, est bien préférable à un long enoncé en langue vulgaire qui n'est pourtant jamais que de l'algèbre traduite. Je remarque en passant que d'après cet éclaircissement la langue batave a seule un nom convenable pour algèbre ou plûtôt pour Analyse: Stellkonst, l'art de construire la norme de résolution. L'espagnol Algebra, derivé de l'arabe et signifiant, fraction; l'italien Cosa ou Cossa, sousentendu maravigliosa, la chose merveilleuse; l'allemand Buchstabenrechnung, calcul litéral, ne présentent que des idées imparfaites ou fausses. Comme elles deviennent justes en y attachant le sens convenable, je ne m'y arrêterai pas davantage.

MACHIN a déja observé qu'au fond toute quantité algébrique est numérique. En effet l'Analyse mathématique opère, non sur les choses elles-mêmes, mais sur leurs rapports de grandeur qui sont évidemment des nombres. Reciproquement tout nombre peut se représenter par une ligne, une surface, un solide, une force, un tems, etc.; enfin par une chose quelconque comparée à une autre chose de même espèce, et chaque fonction numérique est, comme on sait, évaluable ainsi par construction. Les opérations arithmétiques étant cependant, par la nature de nos moyens, susceptibles en pratique d'une précision incomparablement plus grande que celle des operations géométriques et méchaniques, les géomètres modernes préfèrent dans les cas compliqués, les approximations numériques aux constructions mentalement rigoureuses et réellement inutiles de leurs prédecesseurs. Cette révolution dans la manière de voir a converti, pour ainsi dire, l'Analyse en la science des développemens virtuellement combinatoire dans ses procédés. Après les prodiges de l'Astronomie moderne, le dégoût des approximations a cessé chez les trop religieux admirateurs des anciens: [19]) on s'est enfin apperçu qu'on disputait sur des mots et que $\sqrt{2}$, ou une ligne qui représente ce radical, n'est dans l'usage pas plus exact qu'une série convergente dont chaque coefficient est suffisamment approché. $a^{\frac{m}{n}}$, log b, sin C, Arc. tang Z, etc. comme formes simples et faciles par les tables, se considérent déja comme rigoureuses, et on peut leur assimiler chaque autre fonction réellement approximable a volonté. L'abus du terme Exactitude mathématique a duré trop long-tems: encore de nos jours il s'est trouvé des auteurs qui ont rejetté les résultats rigoureux obtenus par le calcul dit infinitésimal, parce qu'ils le

supposaient une méthode approximative: on a nommé géomètrique une courbe à points singuliers joints au hasard à la main, et on a refusé cette épithète à la courbe tracée d'un mouvement continu. La science par excellence n'aurait pas du connaître des logomachies. En est-elle aujourdhui entièrement exempte? La réponse à cette question m'ecarterait trop de l'Analyse Combinatoire où mon sujet me rappelle.

La Science des Combinaisons peut se diviser en deux grandes branches que je distinguerai par les noms de Combinatoire mathématique et de Combinatoire métaphysique en restreignant la valeur de ce mot aux notions incontestées que nous avons des choses, ou plûtôt de leurs rapports de qualité. La seconde branche, à beaucoup près la plus étendue, fera la matière d'une section à part. [20])

La Combinatoire mathématique, ou l'Analyse Combinatoire des rapports de quantité, est celle dont j'ai parlé jusques ici: elle a pour tâche de Réaliser une Norme quelconque de la manière la plus praticable. J'étens ici la signification de Norme à tant d'énoncés de calcul ou de construction qu'on veut. Les deux problêmes suivans peuvent en donner une idée plus précise. f, F, $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$ etc. annoncent des fonctions arbitraires des variables qu'elles précédent.

1. Trouver Fx au moyen des conditions $\overset{1}{F}(A,X,V)=0$; $\overset{2}{F}(A,X,V)=0$; $\overset{3}{F}(A,X,V)=0$.

2. Dans $fV=A+BFV+CF^2V+DF^3y+$ etc. déterminer les coefficiens A, B, C, etc.; F^2 est ici F(Fx) la fonction de la même fonction de V; ainsi des autres. Pour cette série, la plus générale qu'on ait encore imaginée, il ne faut absolument que l'Analyse Combinatoire, et pour le Retour par élimination *elle seule* rend les fonctions différentielles d'une nti-

lité pratique. Dans chaque problème de développement elle ne demande que le tems nécessaire à écrire les termes. 22) On ne saurait raisonnablement prétendre davantage. La prolixité éventuelle des opérations, dépendant en entier de la structure des fonctions données, ne peut retomber sur la méthode. Le chemin rectiligne, s'il est long, n'en est pas moins le plus court possible.

J'observe ici que le calcul des différences directes et inverses étant au fond également combinatoire, on aurait tort de ne pas l'employer aux simplifications préalables, lorsqu'il s'y prête. Séparer l'Analyse différentielle de la Combinatoire est nuire à l'une et à l'autre. Ce n'est même qu'en les amalgamant complettement qu'on pourra donner aux grandes méthodes la perfection dont elles sont susceptibles. Sans cette reunion, le développement des fonctions en séries et le renveloppement des séries en fonctions feront souvent perdre ou la loi des termes généraux ou la simplicité des termes sommatoires.

En nommant exacte toute fonction dont la partie négligé est insensible en pratique, chaque série peut se renvelopper exactement par les méthodes exposées dans la seconde partie de cette Caractéristique. Il s'ensuit qu'un problème rappellé aux expressions

$$\Sigma^m y \Delta x^m, \quad \Sigma^m \Sigma^n (z \Delta x^m . \Delta x^n), \text{ etc.}$$

est parfaitement résoluble. Les combinaisons sont ici dans leur empire et ne laissent rien à désirer.

Une partie plus épineuse est l'Interpolation générale; c'est à dire:

Etant donné $f^{\wedge}V$ pour chaque valeur entière de Λ, évaluer cette fonction consécutive pour Λ fractionnaire. Le développement en puissances ascendantes de Λ conduit chez moi à un Retour de fonction différentielle dont les Combinaisons elles-mêmes ne

viennent que difficilement à bout. Ici surtout l'on peut dire que l'Analyse est encore au berceau. Nous manquons absolument de méthode pour évaluer *praticablement* des expressions de la forme $\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}}$, $L^{\frac{1}{2}} 1$, où l'on suppose $L^2 1 = \log. \log 1$, etc. L'importance d'une solution générale du problème dans quantité de recherches qui intéressant le système du monde et les probabilités supérieures, fait souhaiter que les Géomètres y dirigent leurs efforts: par sa difficulté la tâche est digne des plus habiles. Nous avons déja de profondes recherches sur l'interpolation, mais elles ne sont que particulières. EULER ouvrit la carrière dans son Calcul Differentiel et KRAMP l'étendit nagnère considerablement dans son excellente Analyse des Réfractions où l'inventic brille de toutes parts: le grand ouvrage d'ARBOGAST longtems attendu et que je regrette de ne pas encore posséder, donnera sans toute ici de nouvelles vues dignes de la sagacité de son auteur. [22]) Si elles rendent inutiles mes recherches en ce genre, je supprimerai avec plaisir des essais dont je ne suis à beaucoup près pas content. Ce que je puis assûrer, c'est que sans l'Analyse Combinatoire on ne résoudra que rarement cette équation fonctionnaire dont dépend le problème:

$$Ff x = \frac{df x}{dx} F x.$$ Ici $f x$ est une fonction donnée de x et $F x$ est la fonction à déterminer.

Je reprens les séries. La manière de les considére comme des développemens toujours renveloppables d'un fonction a divers avantages: elle écarte, au moins pour les commençans, la notion d'infini trop vague pour n'être pas pour eux une source des paralogismes. Communement on n'entend par série qu'une suite de terme dont on prend la somme arithmétique: Si cette forme

le plus souvant préférable, il en est pourtant d'autres i mènent dans certains cas plus rapidement au but. lle fonction rébelle à un développement se plie sans ine à un autre. La tangente qui a une loi fort comiquée en puissances de l'Angle, on obtient une élégante i serie continue:

$$\text{tang } x = \frac{x}{1-}\ \frac{x^2}{3-}\ \frac{x^2}{5-}\ \frac{x^2}{7-}\ \text{etc.}$$

n écrivant pour plus de commodité les fractions sucessives en ligne horisontale. [23]) Au contraire sin x e complique en fraction continue, tandis que sa série ulgaire est aussi simple qu'on peut le désirer.

Les fractions continues dont EULER, LAGRANGE, et d'autres grands géomètres ont fait voir l'extrême utiliés sont encore pour l'Analyse Combinatoire une des mines les plus riches: l'exploitation peut se réduire à ces trois problèmes:

1. Changer une fonction en fractions continues à numérateurs de la variable.

P: E: $\Sigma^n X = \frac{x^n}{a+}\ \frac{x^r}{b+}\ \frac{x^s}{c+}$ etc.

2. La fraction générale étant donnée, trouver la fraction sommatoire réduite à sa moindre expression.

P: E: $\frac{1^2}{1^2+}\ \frac{2^2}{3.2^2+}\ \frac{3^2}{5.3^2+}$ etc. L'Analyse différentielle préside ici à la combinatoire.

3. Etant donné $X = 0$, exprimer Y, autre fonction de x, en fonction continue d'une arbitraire.

P: E: De $\frac{x^r}{a+}\ \frac{x^r}{b+}\ \frac{x^r}{c+}$ etc. $= z$,

conclure $x^m = \frac{z^{\frac{m}{n}}}{A+} \frac{z^t}{B+} \frac{z^u}{C+}$ etc. Le c
le plus particulier de cet exemple prouvera combien
calcul différentiel est insuffisant pour déterminer A,
C, etc.

M' étant autrefois beaucoup occupé de la fractio
générale et de la fraction sommatoire réduite, je fus co
duit à des procédés combinatoires et à une notatio
abrégée pour eux. Mais ne connaissant pas alors l
travaux de HINDENBOURG, [24]) je demeurai loin de l'ord
lucide nécessaire dans ces opérations compliquées, et ap
bien des efforts j'abandonnai une partie intéressan
Tant il est vrai qu'on peut être sur la voie et n'y p
avancer, faute d'une certaine forme, qui pour être n
turelle, n'est pourtant jamais que le fruit de longue
et ajoutons, heureuses méditations. Assurement je n
suis pas le seul qui ait fait cette expérience,

LAGRANGE dont les ouvrages sont si riches en pr
cédés combinatoires, observe quelque part qu'on ne pa
vient guère au simple qu'après avoir epuisé le compos
Cette remarque d'un géomètre dont on admire l'élegant
simplicité, est parfaitement applicable à l'Analyse Com
binatoire. Dans les mains de LEIBNITZ, de MOIVR
de BOSCOWICH, etc. cette science décourageait le plus in
trépide calculateur: réduite en système régulier par HI
DENBOURG, rien n'est plus facile aujourdhui, et cett
facilité de l'exécution est même telle qu'on pourr
être tenté de l'étendre à l'invention du système. M
un mot suffit ici, il a échappé à l'universel et persp
cace EULER. [25]) En rendant cette justice au celèb
géomètre de Leipsic, j'ai en vue et les personnes qu
n'estiment une découverte mathématique qu'après
difficulté apparente et celles qui trouvent aisé tout ce qu
a été fait par d'autres.

J'en ai assez dit pour faire sentir l'importance de l'Analyse Combinatoire. Que peut-on lui souhaiter encore? Une caractéristique commode qui la répande chez les géomètres de tous les pays, dont elle ne sauroit manquer d'exciter l'émulation. Elle en est d'autant plus digne que ses usages sont innombrables, et qu'il n'est point de science, point d'Art, qui n'en puisse retirer de l'utilité. En Arithmétique (science toute combinatoire) elle enseigne la pratique la plus courte des grandes multiplications, divisions, éradications, compositions et périodes; elle facilite l'invention des facteurs, des nombres prémiers et figurés comme on veut, et surtout leur détermination sûre et rapide par des machines, dont on n'a pas encore tiré tout le parti possible. LEIBNITZ, LAMBERT, HINDENBOURG, FELKEL, et autres, [26]) en ont donné des preuves interessantes qui doivent encourager. Quand on ne fait pas entrer les nombres en compte, il est plus que probable qu'on peut continuer indéfinement le rapport 3, 1415, et tout autre tant les élémens ne sont pas trop compliqués, sans autre peine que de tourner une manivelle. Ces recherches ne sont pas entierément oiseuses. Ludi in se- ducunt. Le monde n'auroit pas la sublime Méchanique céleste, si LAPLACE eût dédaigné ces jeux du génie.

En Analyse déterminée l'Analyse Combinatoire précède aux développemens et renveloppemens des fonctions, la verification des termes généraux et sommatoires approchés, et elle seule peut réaliser les Eliminations finales [27]) purement curieuses en enoncés differens. En Analyse indeterminée la plupart des solutions sont de son ressort. [28]) En Géometrie et Trigonometrie toute la partie formulaire et beaucoup de constructions, entr'autres la théorie des compartimens, dont on fait tant usage en Architecture. En Méchanique analytique, que LAGRANGE a le premier rédnit en corps de

doctrine, les équations générales des systèmes des corp
et quantité d'autres parties appartiennent de droit à l'An
lyse Combinatoire. Dans les Mathématiques appliquée
elle peut servir l'Astronomie avec ses nombreuses aux
liaires et dépendances, mais surtout la science des pr
babilités, si utile en politique, en jurisprudence, e
finance et négoce, dans les jeux et hasards de tou
espèce [29]). En Chymie [30]) la théorie des fluides aër
formes et la Crystallographie ouvrent encore un immen
champ aux Combinaisons et peuvent par elles fournir
nouvelles lumieres à la Médecine et aux arts d'utilité.

Il est des sciences et des arts à qui la Combinais
méthodique est si essentielle, que sans elle ils cesse
d'être des arts et des sciences. Telles sont par exem
la Cryptographie ou l'art des chiffremens et déchiff
mens [31]) la Caractéristique ou science de la notati
dont les idéographies ou langues universelles ne so
que des simples branches.

Les manufactures de luxe, condamnées à nou
sans cesse le tableau mouvant des modes, retireront
seulement pour leurs machines, mais encore pour la
riété et le choix de leurs productions, des secours imp
tans de la science combinatoire. Il en est de même
beaux-arts où la nouveauté n'est pas moins de néce
té première, et où celle avouée par le bon goût es
extrêmement rare. Je conviens sans peine que l'inv
tion devient de jour en jour plus difficile et que les p
mières places sont prises partout: si les artistes usai
cependant des ressources innombrables que leur o
la combinaison systématique, ils n'accuseraient ja
l'art d'une pauvreté qui n'est que dans eux et ils se
fieraient moins souvent les formes régulières aux ex
vagantes, comme ont fait BORROMINI, BERNINI et
de peintres. C'est principalement en Musique, l
d'agrément le plus répandu, qu'on rencontre au
d'une surcharge bizarre, cette stérilité que les nomi

trumens pallient envain aux oreilles non prévenues. e vrai beau est toujours simple, et sans unité il ne sau- t y avoir d'énergie, et, par consequent, de grand effet.

Qui le croirait? La poesie, pour la distribution meusement ménagée des pieds et strophes, des rimes repos, enfin de toute son harmonie technique, s'en- chit en s'appliquant les combinaisons, ainsi que la torique qui est une moindre poesie et la Logique ou t de penser juste indispensable à toutes les sciences. n connait en ce genre les essais précieux de LEIBNITZ, en supérieurs à ceux de RAIMOND LULLY et du pere NCHER, qui prétendaient l'un dans son Grand-Art, utre dans sa Musurgie, mettre, par des classifica- ns combinatoires un homme sans étude en état de onner sur chaque sujet comme un profond savant. n nuit aux sciences en leur attribuant trop: si cha- né, et surtout celle d'inventer, est un résultat de com- isons, il s'en faut bien que ce soient des combinai- s d'une pratique aussi facile et grossiere.

Usez, n'abusez point; voilà la loi suprême.
VOLT.

Mais ces parties appartiennent déja à la Combina- oire métaphysique, et le géomètre les cède sans gret au philosophe.

B) *PREMIERE PARTIE.*

Section troisième.

Sur l'ALGÈBRE, écriture de l'Analyse mathématique

FRAGMENS.

„Inventée par des mathématiciens, l'Algèbre a une précision lumineuse, et une souplesse dont aucune autre notation ne peut se vanter: mais composée, comme toutes, successivement et sans égard à l'ensemble, elle est loin encore d'être au plus haut dégré d'universalité et d'intelligence facile. L'imprimerie, à laquelle les sciences elles mêmes doivent leurs rapides progrès a retardé ceux de leurs Caractéristiques en assujettissant les écrivains aux types existans. L'Analyse, faite pour le monde entier, n'en a pu sortir des langues européennes et de toutes les classes de savans, celle des mathématiciens est la moins nombreuse.

„Trop souvent le bien est l'ennemi du mieux: le fond fait tort à la forme, tort qui réjaillit nécessairement sur lui. C'est la raison pourquoi aucune langue policée n'a une orthographe raisonnable et qu'on s'opposera toujours aux améliorations. Un reproche qu'on peut trop souvent faire à ces dernières, c'est d'être partielles et de retarder par là la reforme générale. Il est, par exemple, le changement de *oi* en *ai* pour rendre les sons *è* et *ê*, telle la suppression de certaines lettres oiseuses et l'introduction d'accens plus pénibles à la plume. A moins de rebâtir de fond en comble; mais on ne donnera à un vieux château gothique les belles proportions de l'Architecture grecque.

„Avec BEZOUT je nomme Algèbre l'écriture mathématique qui est à l'Analyse ce que les notes de Musique sont à la composition. Au contraire de celle

l'Algèbre pèche par trop de liberté dans l'emploi des signes. S'il est commode pour l'auteur de créer son dictionnaire, il ne l'est pas au lecteur, surtout au commençant, de traduire sans cesse. L'esprit troublé par la versatilité des significations, perd son fil d'Ariadne: chargé de cent signes sans liaison systématique et fatigué d'explications continuelles, il ne peut s'élever sur l'aile de l'imagination pour découvrir au loin l'issue du labyrinthe. C'est là et dans l'incomplétion des prolixes livres élémentaires qu'il faut chercher, bien moins que dans la difficulté du sujet, pourquoi les chefs d'oeuvres d'Analyse sont plus admirés que lûs. Il faut retènir une infinité de préliminaires plus ou moins inhérens, il faut se faire jour a travers une bibliothèque de mémoires académiques pour jouir des sublimes productions de nos grands maîtres. Peu de studieux en ont les moyens le tems et le courage.

„On peut m'objecter que pour obtenir le droit de remarquer les defauts de la science, j'aurais d'abord dû m'y distinguer par des ouvrages marquans. J'ai tort de ce côté, j'ai tort deux fois si mes rèflexions ne sont pas justes. A ceux qui s'étonneront que les maîtres de l'art ne les ayent pas faites, j'observerai qu'ils étaient peut-être trop occupés de l'art lui-même. LEIBNITZ a déja averti qu'il n'y a guère que ceux qui apprennent sans maître qui découvrent certaines choses auxquelles les initiés ne pensent point précisement parce qu'ils les connoissent trop.

„Je repète donc que l'écriture algèbrique est imparfaite par sa versatilité et son manque de plan. Il lui faudrait, comme à la musique et aux autres écritures, des signes permanens. Mais tant qu'elle n'aura pas un bon système de notation, la liberté de varier doit être précieuse au mathématicien: tandis que le musicien est enchaîné *à ses notes, lui ose* dire avec Horace:

Pictoribus atque poëtis aequa potestas:
Hanc veniam damus, petimusque vicissim,

Et en conséquence je présente dans la seconde partie d cet Essai une notation systématique d'une exécuti aisée à la plume, bien plus courte et plus distincte q celle en lettres alphabétiques, et significative au po de ne presque pas exiger d'avertissement pour qui la a une fois. En embrassant l'Analyse entière et même s besoins futurs elle n'a que peu de caractères méthod quement combinés, et ce qui ne peut manquer de p raître singulier, avec des signes nouveaux elle ne cont dit jamais l'usage vraiment général. La simplicité étan essentielle à une écriture de pratique je me suis born des lignes droites assemblées sous des angles moitié tiers de l'angle complet.

Ceux qui trouvent que j'attache trop d'importan à la structure des signes ne songent point qu'en mat matique, et même partout, la forme détermine grande partie le fond. L'Analyse doit ses premi progrès aux abbréviations de discours comme on trouve dans Diophante et dans les auteurs arabes: s progrès suivans appartiennent aux chiffres alg briques, c'est à dire aux chiffres encadrés et aux lettr dont on se servit d'abord pour désigner des nombr connus, puis des nombres quelconques: son vol rapi est dû aux exposans et aux autres symboles fonctionn res et combinatoires. Le calcul des différences de tou espèce qu'est-il sans notation convenable? rien que méthode des limites infructueuse tant de siècles. J'ign qui le premier a imaginé le signe-fonction φx ou Fx mais bagatelle en apparence il a ouvert une source découvertes, et sans lui LAGRANGE n'eut peut-être p donné sa belle formule de reversion et ses autres thé rêmes transcendans. On a disputé cent ans sur la natu du calcul différentiel: on se serait entendu sur le chan

NEWTON et LEIBNITZ eussent écrit: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ ou $\frac{dy}{dx}$ est $\frac{Fv - Fx}{v - x}$ pour le cas de v changé en x près le dégagement du diviseur.

Mais l'effort d'imagination auquel oblige un chanement imperceptible de x dans y, a multiplié (à l'aide les évanouissantes, des infiniment-petits, des riens besoins qui produisent une quantité, des limites qu'on e peut jamais atteindre et qu'on atteint pourtant) les bjections et les explications; et à force de commentaires n est parvenu à obscurcir la chose du monde la plus laire. On peut dire que le noeud gordien n'a été vrainent dénoué que dans ces derniers tems. Nous nous tonnons que des géomètres ayent pû être divisés sur les principes simples; mais ce qui est évident aujourdhui ne l'était point dans sa nouveauté, et la route une *fois* perdue, on ne la retrouve plus qu'avec des peines xtrêmes. Tout est difficile quand on cherche, tout est acile quand on a trouvé. L'oeuf de Colomb peut s'apliquer aux inventions de tout genre, auxquelles on ne arche que les yeux bandés. A la vérité l'inventeur 'épuise jamais son invention: c'est une consolation our la mediocrité laborieuse. Avide de nouvelles découvertes le génie abandonne à la patience le soin de inir et la science y gagne doublement. Cet opuscule. st le fruit de semblables considérations.

Je passe aux bases sur lesquelles il me semble qu'il faut asseoir une bonne notation analytique.

1. La plus grande intelligibilité est ans doute la première qualité, mais il faut ajouter, pour commençant. Au géomètre fait la notation dont il a la routine, paraîtra toujours la meilleure. C'est pour cela (VOLTAIRE et d'autres l'ont déja dit) que les reformes *en sciences et ailleurs* ne s'exécutent guère que

par les jeunes gens, quoique ce ne soient pas toujours eux qui les proposent. N'ayant que la peine d'apprendre, ils préfèrent naturellement la manière la plus simple les vétérans devraient desaprendre pour apprendre, deux choses également ingrates pour qui est en possession d'enseigner.

2. Une autre qualité essentielle est la Précision qu'il ne faut pas confondre avec la simple brièveté Pour indiquer généralement une série, X est plus court qu'

: mais cette dernière représentation, comme on le verra dans la seconde partie, est la miniature de la série même, et X n'est rien sans avertissement. On voudra bien faire cette remarque toutes les fois que nos symboles sont composés: ils s'enterprétent alors eux mêmes. La diffusion consiste en détails accumulés qui fatiguent le lecteur plus qu'ils ne l'éclairent: celle ci n'a qu'une portion donnée d'attention dont on doit être économe pour qu'elle dure jusqu'à la fin.

3. Ce qui met le sceau aux conditions précédentes c'est la construction méthodique des signes qui aide à les retenir, malgré leur nombre. Tout dépend ici d'un heureux choix d'élémens: est il fait? l'art combinatoire en tire à peu de fraix une richesse supérieure à tous les bésoins. Les élémens doivent être peu nombreux et de bon goût.

S'il ne faut pas négliger la beauté des formes, elle doit cependant être subordonnée à la facilité de l'éxecution. L'élegance de la simplicité est la seule qui convienne aux sciences, celle d'ornement est pour les arts Sous ce point de vue le Σ qui a 6 traits est inférieur à

qui n'en a que trois que la plume trace d'un coup mais c'est là le moindre avantage de notre signe sommatoire.

On trouvera, j'espère, en général nos formes agréables et dociles. En sacrifiant quelques accessoires, il ne

faudrait même pas de nouveaux caractères d'impression: mais, comme sans eux la composition typographique se complique, la gravure sera préférable en attendant. Il serait même à souhaiter que tous les ouvrages de mathématiques, surtout élémentaires, se publiassent en planches, ne fût ce que parceque la figure pourrait toujours accompagner l'explication. La méthode des grands analystes modernes de compter les yeux pour rien en traitant la géometrie et la méchanique a ses inconveniens que ne compense pas le bon marché de l'ouvrage: Je donne dans la troisième partie de cet Essai une instruction complette et des procédés peu couteux pour graver en peu de tems à l'eau forte et en étain. Si les géomètres s'y accoutumaient (il ne faut pour cela que de la volonté et deux ou trois mois d'exercice) leurs productions ne fourmilleraient plus de fautes qui dévoyent le lecteur, et que les longs errata redressent rarement toutes. Les doigts de l'auteur sont plus fidèles que ceux du compositeur typographique rarement mathématicien.

Afin de montrer la souplesse de ma notation combinatoire sous tous les rapports, je l'ai appliquée à un Microcosme de haute Analyse qui pourra au moins aider les futurs rédacteurs d'élémens, à propager le goût de la science qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain, abstraction faite de son utilité reconnue. Aux jeunes géomètres qui voudront m'étudier dans cette vue, je conseillerai de copier mot à mot, les 5 premières sections de la seconde partie, et celle de l'Analyse Combinatoire. Une seule transcription reflechie instruira plus qui cent lectures. En s'identifiant ainsi avec l'auteur, on s'approprie ses idées et on surmonte le préjugé de l'habitude qui fait paraître les procedés qu'on sait préférable aux dix fois plus faciles qu'il faut apprendre.

Les géomètres véterans qui se résoudront à parcourir mon travail, en *seront dédommagés* peut-être par

des théorêmes néufs ou demontrés d'une manière nouvelle et par le Polynome Combinatoire de HINDENBOURG. Je me reserve d'en parler plus amplement dans les sections suivantes.

Puisse mon essai d'une algèbre universelle être de quelque utilité pratique, ou engager au moins une main plus savante à produire un ensemble plus simple et plus parlant encore! Il est très possible et j'en donnerais une preuve dans cet ouvrage, si une notation analytique sans $+$ $-$ $.$: et leurs équivalens, sans lettres et sans chiffres, n'avait trop l'air d'un amusement mathématique. En attendant les géomètres prendront ce qu'ils voudront de mon systême: il leur fournira au moins des ressources pour le cabinet.

Dans une entreprise aussi neuve, et tranchons le mot, aussi téméraire que celle d'une réforme algébrique, j'ai besoin de la plus grande indulgence: mais j'ai fait ce que j'ai pû pour m'en rendre digne. Vingt pages ont couté des années de travail. Des systèmes sans nombre ont précédé celui que je soumets au jugement du public mathématicien, et s'il m'est permis de le dire, je ne suis arrivé au plus praticable qu'après avoir épuisé ceux qui ne l'étaient point.

II.

DE'VELOPPEMENT GE'NE'RAL AUX FONCTIONS ARBITRAIRES.

PAR BURMANE.

Les méthodes vraiment générales tirent d'un petit nombre de principes simples une richesse inépuisable de conséquences utiles. C'est le propre du Calcul différentiel, de l'Analyse Combinatoire et des Dérivations du Professeur ARBOGAST. Une théorie qui participe de ces trois et que je nomme fonctionnaire m'occupe depuis plusieurs années: l'esquisse suivante mettra à portée de juger de sa facilité et de son étendue.

§ 1. f, F, $\overset{x}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$, etc. $\overset{0}{F}$, $\overset{0x}{F}$, $\overset{c2}{F}$, etc. seront des caractéristiques de fonction indépendantes.

$f(fx)$ ou ffx s'abrégera $f^2 x$ et se prononcera fonction 2me de x. On comprend $f^3 x$, $f^4 x$, $f^5 x$ etc. $f^n x$, la n^{me} fonction consecutive de x, est à peu près ce qu'ARBOGAST appelle la n^{me} Dérivée.

f^{-1} indiquera l'opération inverse de f; de sorte que $f^{-1} fx = x$. Je donne à $f^{-1} x$ le nom systématique de fonction négative de x. Les formes $f^{-s} x$, $f^{-n} x$ s'expliquant par là. Si $fx = o$, on a $x = f^{-1} o$, expression qui peut avoir plusieurs et même une infinité de valeurs.

Il s'ensuit que

$$f^m f^n x = f^n f^m x = f^{m+n} x, \quad f^m f^{-n} x = f^{-n} f^m x = f^{m-n} x,$$

$$f^1 x = fx, \qquad f^o x = f^{x-x} x = ff^{-x} x = x.$$

Imitée de d^n et d^{-n}, la notation exposée est celle de tous les géomètres et n'a rien de mystérieux: la nouveauté qu'elle peut avoir est dans le fond et non dans la forme.

Ces principes fonctionnaires sont parfaitement généraux. J'ai fait cette remarque en les donnant dans un Essai de Calcul fonctionnaire présenté à l'Institut National de France en VI, mais trop imparfait alors pour pouvoir être imprimé. Mes idées s'étendirent depuis, et plus d'un an avant que l'excellent Calcul des Dérivations quittât la presse, j'avais déjà communiqué au Professeur HINDENBOURG et à d'autres amis littéraires la série aux fonctions consécutives,

$$Fx = A + Bfx + Cf^2x + Df^3x + \text{ etc.}$$

En cherchant à me garantir du réproche futur de m'attribuer ce qui ne m'appartient pas, je suis très loin de vouloir atténuer le mérite du savant géomètre de Strasbourg, que personne n'admire plus que moi: nous n'avons pas communiqué ensemble. ARBOGAST a au-moins la simultanéité d'invention, et dans ce qu'il a publié le premier je lui cède avec plaisir la reconnaissance publique. Occupés du même objet nous avons dû nous rencontrer quelques fois; mais nos points de départ et notre marche différant entièrement, il me reste assez des choses propres.

§. 2. Si nous comprenons par SUITE une succession de termes soumis à une même loi, et pour leur structure et pour leur liaison analytique, la théorie des développemens est à peine entamée. J'abandonne cette généralité à de plus habiles et me borne aujourdhui aux Séries et aux Fractions continues des fonctions si indépendantes entr' elles que le calculateur les choisit à volonté. Ceci distingue mes développemens de ceux d'ARBOGAST dont les termes, dérivés chacun du précédent, dépendent nécessairement les uns des autres.

Voici d'abord mes normes générales:

SÉRIE

$$Fx-Fa=A\overset{1}{F}x+B\overset{2}{F}x+C\overset{3}{F}x+\ldots+N\overset{n}{F}x+\text{ etc.}$$

FRACTION CONTINUE

$$Fx-Fa=\frac{\overset{1}{F}x}{A+}\ \frac{\overset{2}{F}x}{B+}\ \frac{\overset{3}{F}x}{C+}:\ldots\frac{\overset{n}{F}x}{N}+\text{ etc.}$$

J'écris les fractions successives en ligne horisontale: le + après A, B, C, etc. empêchent de s'y tromper.

§. 3. Commençons par

$$Fx-Fa=A\overset{1}{F}x+B\overset{2}{F}x+C\overset{3}{F}x+\ldots+M\overset{n-1}{F}x+N\overset{n}{F}x+$$

etc. et supposons $\overset{1}{F}x$ nulle par $x=a$, $\overset{2}{F}x$ nulle par $x=a$ et $x=b$, $\overset{3}{F}x$ nulle par $x=a$, $x=b$ et $x=c$; enfin $\overset{n}{F}x$ nulle par $x=a$, b, c, d, jusques n, lettre n^{me}. Ces valeurs de x successivement employées dans la série normale, produisent les équations suivantes pour déterminer A, B, C, etc.

$$Fb-Fa=A\overset{1}{F}b$$
$$Fc-Fa=A\overset{1}{F}c+B\overset{2}{F}c$$
$$Fd-Fa=A\overset{1}{F}d+B\overset{2}{F}d+C\overset{3}{F}d$$

et en général

$$Fn-Fa=A\overset{1}{F}n+B\overset{2}{F}n+\ldots+M\overset{n-1}{F}n.$$

d'où $$A=\frac{Fb-Fa}{\overset{1}{F}b}$$

$$B=\frac{Fc-Fa}{\overset{2}{F}c}-A\frac{\overset{1}{F}c}{\overset{2}{F}c}$$

$$\text{d'où } C = \frac{Fd - Fa}{\overset{3}{F}d} - A\frac{\overset{1}{F}d}{\overset{3}{F}d} - B\frac{\overset{2}{F}d}{\overset{3}{F}d}$$

et en général

$$M = \frac{Fn - Fa}{\overset{n-1}{F}n} - A\frac{\overset{1}{F}n}{\overset{n-1}{F}n} - B\frac{\overset{2}{F}n}{\overset{n-1}{F}n} - \ldots - L\frac{\overset{n-2}{F}n}{\overset{n-1}{F}n}$$

§. 4. Voilà le terme général en série récurrente Pour obtenir son expression immédiate mettons la s conde suite d'équations sous une forme combinatoire f cile à écrire et à retenir.

$$A = 01$$
$$B = 02 - A.\ 12$$
$$C = 03 - A.\ 13 - B.\ 23$$
$$D = 04 - A.\ 14 - B.\ 24 - C.\ 34$$
$$E = 05 - A.\ 15 - B.\ 25 - C.\ 35 - D.\ 45$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

LEIBNITZ est l'inventeur de ces coefficiens parla si commodes pour découvrir les loix compliquées. Ch nous le premier chiffre est l'indice de la fonction num rateur du vrai coefficient, et le second chiffre est l'ind ce de la fonction dénominateur. Augmenté d'une uni ce dernier apprend encore la quantième lettre rempla x dans les deux fonctions. Ainsi

$$24 = \frac{\overset{2}{F}e}{\overset{4}{F}e}, \quad 59 = \frac{\overset{5}{F}k}{\overset{9}{F}k}, \quad \text{etc.}$$

Par la substitution continuelle des valeurs connue on obtient en ordonnant selon 01, 02, 03, etc, et ra geant par ordre ascendant de droite à gauche et d haut en bas

$$=01$$
$$=02-12.01$$
$$=03-23.02+\left.\begin{matrix}23.12\\13\end{matrix}\right)01$$
$$=04-34.03+\left.\begin{matrix}34.23\\24\end{matrix}\right)02-\left.\begin{matrix}34.23.12\\24.12\\34.13\\14\end{matrix}\right)01$$
$$=05-45.04+\left.\begin{matrix}45.34\\35\end{matrix}\right)03-\left.\begin{matrix}45.34.23\\35.23\\45.24\\25\end{matrix}\right)02+\left.\begin{matrix}45.34.23\ 12\\35.23\ \ 2\\45\ 24.12\\25.12\\45.34.13\\35.13\\45.14\\15\end{matrix}\right)01$$
$$=06-56.05+\left.\begin{matrix}56.45\\46\end{matrix}\right)04-\left.\begin{matrix}56.45.34\\46\ 34\\56.35\\36\end{matrix}\right)03$$
$$+\left.\begin{matrix}56.45.34.23\\46.34.23\\56.35.23\\36.23\\56.45.24\\46.24\\56.25\\26\end{matrix}\right)02-\left.\begin{matrix}56.45.34.23.12\\46\ 34.23.12\\56.35.23.12\\36.23.12\\56\ 45.24\ 12\\46.24.12\\56.25.12\\26\ 12\\56\ 45.34.13\\46.34.13\\56.35\ 13\\36.13\\56.45.14\\46.14\\56.15\\16\end{matrix}\right)01$$

nsi de suite

La seule disposition des termes partiels decouvre leur loi, qui est telle pour le n^{ieme} coefficient:

$N = on + a.o(n-1) + b.o(n-2) + c.o(n-3) + \text{etc.}$

$a = -(n-1)n$

$b = -a.(n-2)(n-1) - (n-2)n$

$c = -b.(n-3)(n-2) - a.(n-3)(n-1) - (n-3)n$

$d = -c.(n-4)(n-3) - b.(n-4)(n-2) - a.(n-4)(n-1) - (n-4)n$

$e = -d.(n-5)(n-4) - c.(n-5)(n-3) - b.(n-5)(n-2) - a.(n-5)(n-1) - (n-5)n$

etc. etc. etc.

Les novices en Analyse Combinatoire voudront bien ne pas confondre avec les recurrences ordinaires cette construction d'un terme au moyen de ses parties intégrantes: elle donne sur le champ tel coëfficient qu'on veut. P. E.

le 9ième coëfficient

$$= o9 - 89.o8 + \left(89.78 - 79\right)o7 - \left(89.78.67 + 79.67 + 89.68 - 69\right)o6 + \text{etc.}$$

Un peu d'attention découvre d'autres loix; mais la présente ne laisse rien à désirer: elle n'exige que le tems nécessaire pour écrire le developpement.

Cette méthode simple de trouver le terme général d'une série si étendue prouve la supériorité de l'Analyse Combinatoire sur la differentielle dans cette partie.

§. 5. Passons à un autre point de vue, en supposant $\overset{n}{F}x = f^n x$, quantité nulle par $x = a$. Il en resulte $Fx - Fa = Af x + Bf^2 x + Cf^3 x + \ldots + Nf^n x + \text{etc.}$

Si f^{-1} est de nature à se prendre terme pour terme et à ne pas altérer les facteurs sans x,

$f^{-n}(Fx - Fa) = f^{-n}(Af x + Bf^2 x + Cf^3 x + \text{etc.}$ se reduira à $f^{-n} Fx = N + Of x + Pf^2 x + \text{etc.}$

Par $x = a$ nous obtenons ici $N = f^{-n} Fa$, et par là.

$\Delta Fa = f^{-1}Fa.fx + f^{-2}Fa.f^2x + f^{-3}Fa.f^3x + \text{etc}$

Le théorème de TAYLOR $Fx - Fa = \frac{dFa}{da}.\int dx + \frac{d^2Fa}{da^2}.\int^2 dx^2 + \frac{d^3Fa}{da^3}.\int^3 dx^3 + \text{etc.}$ est le cas le plus particulier de la série aux fonctions consécutives.

Une infinité d'autres opérations que celles indiquées par d et Δ, $\int$ et Σ satisfait à $Fx - Fa = f^{-1}Fa.fx + \text{etc.}$ J'observe ici qu'en fonctions consécutives il y a une différence essentielle entre fFz simple combinaison de Fz avec des constantes, et fFz, combinaison des variations de Fz avec des variations de z. Dans ce paragraphe j'embrasse les deux cas, en les soumettant à la limitation stipulée.

§. 6. Soit $\overset{n}{F}x$ de la forme $\overset{1}{F}x.\overset{2}{F}x.\overset{3}{F}x...\overset{n}{F}x$. Donc

$Fx - Fa = A\overset{1}{F}x + B\overset{1}{F}x.\overset{2}{F}x + C\overset{1}{F}x.\overset{2}{F}x.\overset{3}{F}x + \text{etc.}$

Comme $\overset{1}{F}x = 0$, $\overset{2}{F}x = 0$, $\overset{3}{F}x = 0$, etc. produisent respectivement $x = \overset{1}{F}{}^{-1}0 = a$, $x = \overset{2}{F}{}^{-1}0 = b$, $x = \overset{3}{F}{}^{-1}0 = c$, etc. la formule du §. 4. construit sur le champ A, B, C, etc.

Quand l'évaluation de $Ff^{-1}0$ n'est pas immédiatement possible, je l'écris $Ff^{-1}(fs - fs)$, et le théorème taylorien donne par $Ff^{-1}fs = Fs$,

$$f^{-1}0 = Fs - \frac{dFs}{dfs}.\frac{fs}{1} + \frac{d^2Fs}{dfs^2}.\frac{fs^2}{1.2} - \frac{d^3Fs}{dfs^3}.\frac{fs^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

s étant arbitraire.

Cette solution simple se trouve dans l'Essai de calc. fonct. section 4). A chaque différentiation on divise par dfs et réduit, moyennant quoi on ne parvient pas à de secondes différences de s. Lorsque ce

procédé complique on y remédie souvent par

$$\frac{d^n Fs}{df s^n} = \frac{d^{n-1}\left[\frac{dFs}{ds}\cdot\left(\frac{s-s}{fs-fs}\right)^n\right]}{ds^{n-1}},$$

la constante s se changeant en s après les différentiatio

J'ai présenté cette formule conversionnelle un p plus généralement dans un mémoire que l'Institut N tional a jugé digne d'être imprimé dans ses recueils l'an VII, en m'observant qu'elle peut se déduire théorèmes réversionels de LAGRANGE et de LAPLACE.

Afin d'épargner à d'autres des recherches inut et peut-être des paralogismes, j'avertis qu'il n' permis ni de prendre n négatif, ni de changer sou signe d^{n-1}, la fraction indécise $\frac{s-s}{fs-fs}$ en sa val finale $\frac{ds}{dfs}$.

§. 7. Autre cas particulier du § 3.

$\overset{n}{F}x$ étant $\overset{on}{F}x.[\overset{in}{F}x-\overset{in}{F}a]\ [\overset{2n}{F}x-\overset{2n}{F}(a+k)]$

$[\overset{3n}{F}x-\overset{3n}{F}(a+2k)]\ldots[\overset{nn}{F}x-\overset{nn}{F}(a+(n-1)k)]$

on a $Fx-Fa=A\overset{01}{F}x.[\overset{11}{F}x-\overset{11}{F}a]+B\overset{02}{F}x.[\overset{12}{F}x-$

$[\overset{22}{F}x-\overset{22}{F}(x+k)]+$

Outre la solution du §. 3. qui donne $b=a+$ $c=a+2k$, $d=a+3k$, etc. nous avons encore suivante,

$\overset{n+r}{F}x$ variée n fois selon $\Delta x=k$ contante, sur facteur $\overset{n+1}{F}(x+nk)-\overset{n+1}{F}(a+nk)$, que $x=a$ annull

Il s'ensuit que $\frac{\Delta^n \overset{n+r}{F}x}{k^n}$ developpé disparaîtra a et qu'en différentiant n fois l'équation proposée,

endra $\frac{\Delta^n Fx}{k^n} = A\frac{\Delta^n (\overset{01}{F}x.[\overset{11}{F}x-\overset{11}{F}a])}{k^n}$

$+ B\frac{\Delta^n (\overset{02}{F}x.[\overset{12}{F}x-\overset{12}{F}a][\overset{22}{F}x-\overset{22}{F}(a+k)])}{k^n} +$

$+ N\frac{\Delta^n(\overset{on}{F}x.[\overset{1n}{F}x-\overset{1n}{F}a]..[\overset{nn}{F}x-\overset{nn}{F}(a+(n-1)k])}{k^n}$

condition de changer x en a après les différentia-

Application. $\Sigma Fx.\Delta x$ nulle par $x=a$ devient ainsi

$\overset{01}{F}x.\Delta x = A\overset{01}{F}x.[\overset{11}{F}x-\overset{11}{F}a] + B\overset{02}{F}x.[\overset{12}{F}x-\overset{12}{F}a]$

$\overset{12}{F}x-\overset{22}{F}(a+\Delta x)] +$ etc. série convergente à volonté, puisque chaque fonction y est arbitraire. La rélation des coefficiens est la même qu'en haut.

Par k nulle, on a $\int Fx\,dx = A\overset{01}{F}x.(\overset{11}{F}x-\overset{11}{F}a)$

$B\overset{02}{F}x.(\overset{12}{F}x-\overset{12}{F}a)(\overset{22}{F}x-\overset{22}{F}a) + C\overset{03}{F}x.(\overset{13}{F}x-\overset{13}{F}a)(\overset{23}{F}x-\overset{23}{F}a)$

$\overset{33}{F}x-\overset{33}{F}a) +$ etc. et la rélation

$\frac{Fx}{dx^n} = A\frac{d^n(\overset{01}{F}x.[\overset{11}{F}x-\overset{11}{F}a])}{dx^n} + \ldots$

$\ldots + N\frac{d^n(\overset{on}{F}x.[\overset{1n}{F}x-\overset{1n}{F}a]\ldots[\overset{nn}{F}x-\overset{nn}{F}a)}{dx^n},$

pour pour x finalement $=a$.

$\int^m Fx.\Delta x^m$ et $\int^m Fx.dx^m$ s'obtiennent d'une ma- semblable: mais je ne puis m'étendre là-dessus.

§. 8. *Cas plus particulier.* D'après les principes rentiels de l'Essai de Calcul fonctionnaire, section 2, on a pour Δx *constante*,

$$\Sigma^m \Delta(x-a)^m = \frac{x-a}{1} \cdot \frac{x-a-\Delta x}{2} \cdot \frac{x-a-2\Delta x}{3} \cdots \frac{x-a-(n-1)\Delta x}{n}$$

sans arbitraires ajoutées.

Ceci posé, $Fx - Fa = A\overset{1}{F}x.\ \Sigma\Delta(x-a) + B\overset{2}{F}x.\ \Sigma^2\Delta(x-a)^2 + C\overset{3}{F}x.\ \Sigma^3\Delta(x-a)^3 +$ etc. prendra la forme suivante par le procédé du §. 3. en changeant x en $a+n\Delta x$ et effaçant ce qui se détruit dans chaque facteur

$$F(a+n\Delta x) - Fa = \frac{n\Delta x}{1} A\overset{1}{F}(a+n\Delta x) + \frac{n(n-1)\Delta x^2}{1.2} B\overset{2}{F}(a+n\Delta x) + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta x^3}{1.2.3} C\overset{3}{F}(a+n\Delta x) + \ldots + \Delta x^n . N\overset{n}{F}(a+n\Delta x)$$

Mais on a aussi par le paragraphe précédent, exécutant les développemens différentiels et supprimant ce que $x=a$ détruit,

$$\frac{\Delta^n Fa}{\Delta a^n} = \frac{n}{1} A\frac{\Delta^{n-1}\overset{1}{F}a}{\Delta a^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} B\frac{\Delta^{n-2}\overset{2}{F}a}{\Delta a^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} C\frac{\Delta^{n-3}\overset{3}{F}a}{\Delta a^{n-3}} + \ldots + N\overset{n}{F}a,$$

Δa étant ici la même constante que Δx. Cette relation des coëfficiens est la meilleure pour les différences nulles et la prémiere pour les différences finies.

Changeons Δ et Σ en d et $\int$, il vient par

$$\int^n d(x-a)^n = \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}$$

$$Fx-Fa=A\overset{1}{F}x.\frac{x-a}{1}+B\overset{2}{F}x.\frac{(x-a)^2}{1,2}$$
$$+C\overset{3}{F}x.\frac{(x-a)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

$$\frac{d^nFa}{da^n}=\frac{n}{1}A\frac{d^{n-1}\overset{1}{F}a}{da^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot$$
$$B\frac{d^{n-2}\overset{2}{F}a}{da^{n-2}}+\ldots+N\overset{n}{F}a$$

§. 9. *Extension du cas précédent.* La série plus générale

$$Fx-Fa=A\overset{1}{F}x.\frac{fx-fa}{1}+B\overset{2}{F}x.\frac{(fx-fa)^2}{1.2}$$
$$+C\overset{3}{F}x.\frac{(fx-fa)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$ a pour relation des coëfficiens.

$$\frac{d^nFa}{dfa^n}=\frac{n}{1}A\frac{d^{n-1}\overset{1}{F}a}{dfa^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}B\frac{d^{n-2}\overset{2}{F}a}{dfa^{n-2}}$$
$$+\ldots+N\overset{n}{F}a$$ où l'on employera s'il en est besoin la formule conversionnelle §. 6.

Application I. $\int Fx.dx=A\overset{1}{F}x.\frac{fx-fa}{1}$
$+B\overset{2}{F}x.\frac{(fx-fa)^2}{1.2}+\text{etc.}$, intégrale nulle par $x=a$ donc cette relation pour déterminer A, B, C, etc.

$$\frac{d^n(\int Fa.da)}{dfa^n}\text{ ou }\frac{d^{n-1}\left(\frac{Fa.da}{dfa}\right)}{dfa^{n-1}}=$$
$$\frac{n}{1}A\frac{d^{n-1}\overset{1}{F}a}{dfa^{n-1}}+\ldots+N\overset{n}{F}a,$$ ou par la formule conversionelle $\frac{d^{n-1}\left[Fa.\left(\frac{a-a}{fa-fa}\right)^n\right]}{da^{n-1}}$

$$:\frac{n}{1}A\frac{d^{n-2}\left[\frac{d\overset{1}{F}a}{da}.\left(\frac{a-a}{fa-fa}\right)^{n-1}\right]}{da^{n-2}}+\ldots+N\overset{n}{F}a$$

a constante devenant finalement a. $\int^n Fx.dx^m$ ayant, comme il est toujours possible à l'aide des constantes ajoutées, un facteur x^m, n'éxige de plus qu'un développement plus ou moins grand du membre-gauche de la rélation.

Ces séries intégrales où chaque terme est à l'arbitre du calculateur, sont bien supérieures à celles de BERNOULLI qui divergent trop souvent.

Application II. $Fx - Fa = A\overset{1}{F}fx.\frac{fx-fa}{1} + B\overset{2}{F}fx.\frac{(fx-fa)^2}{1.2} + C\overset{3}{F}fx.\frac{(fx-fa)^3}{1.2.3} +$ etc. a pour rélation des coëfficiens

$$\frac{d^nFa}{dfa^n} \text{ ou } \frac{d^{n-1}\left[\frac{dFa}{da}.\left(\frac{a-a}{fa-fa}\right)^n\right]}{da^{n-1}} =$$

$$\frac{n}{1}A\frac{d^{n-1}\overset{1}{F}fa}{dfa^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}B\frac{d^{n-2}\overset{2}{F}fa}{dfa^{n-2}} +$$

$+ N\overset{n}{F}a$ Le membre droit n'a pas besoin de conversion différentielle, fa y étant la variable commune.

Soit $fx = o$ une équation donnée, vulgaire ou transcendante, on a en même tems

$$Fx = Fa - A\overset{1}{F}o.\frac{fa}{1} + B\overset{2}{F}o.\frac{fa^2}{1.2} - C\overset{3}{F}o.\frac{fa^3}{1.2.3}$$

$+$ etc.

Voila donc une conversion fonctionnaire plus étendue que celles données jusqu'aujourdhui, puisque non seulement a, mais encore la structure de $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$, etc. y sont arbitraires. C'est le Retour des suites de LAGRANGE généralisé par les fonctions indépendantes, sous une forme pratique commode.

Exemple. De $fx - \int X dx = o$ conclure immédiatement Fx. En prenant pour a la valeur de x qui annulle l'intégrale: on a pour Fx la série ci-dessus, et

rélation récurren e des coëfficiciens,

$$\frac{d^n F x}{(f x - \int X dx)^n} = \frac{n}{1} A \frac{d^{n-1} \overset{I}{F}(f x - \int X dx)}{d(f x - \int X dx)^{n-1}}$$

$\ldots + N \overset{n}{F} f x$, x s'y changeant en a après les différentiations. Cette condition dégage la rélation de tout signe $\int$. Je ne sache pas qu'on ait encore étendu les secours de suite aux équations différentielles.

Le terme général $N \overset{on}{F} f x . [\overset{In}{F} f x - \overset{In}{F} f a] [\overset{2n}{F} f x - \overset{2n}{F} f a] \ldots [\overset{nn}{F} f x - \overset{nn}{F} f a]$ donne un Retour beaucoup plus étendu dont les §. §. 3 et 7. nous assûrent également la loi des coëfficiens.

§. 10. Soient pour simplifier $Fx - Fa = (X)$, $Fx[Fx - Fa][\overset{2n}{F} x - \overset{2n}{F}(a+k)] \ldots [\overset{nn}{F} x - \overset{nn}{F}(a+(n-1)k)] = \overset{n}{(X)}$; soient X et $\overset{n}{X}$ ces mêmes quantités en y changeant x en x après les différentiations éventuelles: nous aurons par la remarque du §. 7, la n^{ieme} variée de $\overset{n+r}{X}$ nulle. Il en résulte, qu'en différentiant n fois selon $\Delta x = k$ l'equation $(X) = A(\overset{I}{X}) + B(\overset{2}{X}) + C(\overset{3}{X}) + \text{etc.}$, et divisant toujours par la différence qu'affecte le premier coëfficient, il disparoitra chaque fois un de ceux-ci et $x = a$ nous donnera successivement

$$A = \frac{\Delta X}{\Delta \overset{I}{X}}, \qquad B = \frac{\Delta(\Delta X : \Delta \overset{I}{X})}{\Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{I}{X})}$$

$$C = \frac{\Delta[\Delta(\Delta X : \Delta \overset{I}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{I}{X})]}{\Delta[\Delta(\Delta \overset{3}{X} : \Delta \overset{I}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{I}{X})]}$$

$$D = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta[\Delta(\Delta X : \Delta \overset{I}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{I}{X})]}{\Delta[\Delta(\Delta \overset{3}{X} : \Delta \overset{I}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{I}{X})]}\right)}{\Delta\left(\frac{\Delta[\Delta(\Delta \overset{4}{X} : \Delta \overset{I}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{I}{X})]}{\Delta[\Delta(\Delta \overset{3}{X} : \Delta \overset{I}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{I}{X})]}\right)}$$

Or le §. 7. nous enseigne le développement de en fonction commune et différentielle: nous savons do exécuter la n^{ieme} de ces différentiations hétérogènes, sa autre peine que d'écrire le résultat.

§. 11. *Interpolation de, etc.*, $f^{-2}x$, $f^{-1}x$, x, fx, f^2x, f^3x, etc. C'est l'évaluation de $f^{\pm n}x$, pour fractionnaire. Communement n ne passe pas $\frac{1}{2}$.

En prenant pour a, b, c, etc. des nombres de suite etc. -2, -1, 0, 1, 2, 3, etc. la série no male est en même tems une formule d'interpolatio Voici de plus la méthode que j'ai donnée dans l'Ess de *Calcul fonctionnaire* et qui est au moins singuliè

Soit $f^n x - x = A\frac{n}{1} + B\frac{n^2}{1.2} + C\frac{n^3}{1.2.3}$ + etc., on aura $A = \frac{df^n x}{dn}$ pour n nulle apr la différentiation, ce que nous représenterons par $\frac{df^0 x}{d0}$. Mais comment différentier un pur indice?

La transformation $\frac{df^0 x}{d0} = fx - x - \frac{1}{2}(f^2x - 2fx + x)$ $+ \frac{1}{3}(f^3x - 3f^2x + 3fx - x)$ — etc. ne converge presqu jamais: ordonnée en fonctions ascendantes, elle donn un résultat en apparence absurde: elle suppose d'ailleu que fx, f^2x, f^3x, etc. soient possibles; ce qui n souvent pas lieu en interpolation. P. E. dans $L^{\frac{1}{2}}1$ o $L^2 1 = LL1 = L0 = -\infty$. Cherchons à tourner c obstacles. $\frac{df^n x}{dn} = \frac{f^{n+dn}x - f^n x}{dn} = \frac{f^n f^{dn} x - f^n x}{dn}$ par §. 1. Comme A, B, C, etc. ne contiennent p n on a $f^{dn}x = x + A\frac{dn}{1} + B\frac{dn^2}{1.2}$ + etc. $f^n f^{dx} x = f^n(x + A\frac{dn}{1} + \text{etc.}) = f^n x + \frac{df^n x}{dx}$

$dn + (\text{etc.})\, dn^2$ par la formule de TAYLOR. Substitution faite de cette valeur, il vient en arrangeant

$\frac{df^n x}{dn} = A \frac{df^n x}{dx}$, théorème remarquable, qu'on peut énoncer ainsi : $\frac{dF^{m+n}x}{dn} = \frac{dF^m x}{dF m} \cdot \frac{dF^{m+n}x}{dx}$.

Soumettons y le développement de $f^n x$, et l'identité de $A + B\frac{n}{1} + C\frac{n^2}{1.2} + D\frac{n^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ $= A + A\frac{dA}{dx}\cdot\frac{n}{1} + A\frac{dB}{dx}\cdot\frac{n^2}{1.2} + \text{etc.}$ nous prouvera $B = A\frac{dA}{dx}$, $C = A\frac{dB}{dx} = A\frac{d(AdA)}{dx^2}$, $D = A\frac{dC}{dx} = A\frac{d(Ad(AdA))}{dx^3} + \text{etc.}$, et par conséquent $f^n x - x = A\frac{n}{1} + A\frac{dA}{dx}\cdot\frac{n^2}{1.2} + \frac{Ad(AdA)}{dx^2}\cdot\frac{n^3}{1.2.3} + \frac{Ad(Ad(AdA))}{dx^3}\cdot\frac{n^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$ Jusques ici l'Essai de Calcul fonctionnaire à la fin de la 4me Section.

Pour déterminer A je remarque que cette équation a lieu pour chaque valeur de n : donc en prenant $n = 1$ on trouve en divisant

$$A = \frac{fx - x}{1 + \frac{dA}{2dx} + \frac{dA(dA)}{2.3dx^2} + \frac{d(Ad(AdA))}{2.3.4dx^3} + \text{etc.}}$$

La substitution continuelle de la valeur en partie connue de A donnera une espèce de fraction continue d'un calcul très rebelle.

Autrement. Désignons A par Fx pour avoir

$f^n x = x + Fx \cdot \frac{n}{1} + \text{etc.}$ Nous aurons aussi

$f^n fx = fx + Ffx \cdot \frac{n}{1} + \text{etc.}$ et

$ff^n x = f(x + Fx \cdot \frac{n}{1} + \text{etc.}) = fx + \frac{dfx}{dx} Fx \cdot \frac{n}{1}$

$+ \text{etc.}$ par le théorème taylorien. Donc puisque $f^n fx = ff^n x$ par §. 1., l'identité de leurs dévelop. pemens fournit, en arrangeant,

$\frac{Ffx}{Fx} = \frac{dfx}{dx}$ équation où il faut déterminer $Fx = A$. Sa résolution générale depend des différences fonctionnaires, et si on la veut praticable, elle passe encore les forces de chaque analyse. Dans les cas particuliers il y a des ressources sans nombre, et les fractions continues sont une des plus sûres.

§. 12. Nous avons été obligés d'astreindre le $\overset{n}{F}x$ de la série normale à des conditions de nullité; nous pourons les éviter dans la fraction continue normale,

$Fx - Fa = \frac{\overset{1}{F}x}{A+} \frac{\overset{2}{F}x}{B+} \frac{\overset{3}{F}x}{C+} \text{etc.}$ Mais avant tout, établissons quelques préliminaires.

§. 12. *Théorème.* $1'\ 2'\ 3'\ 4'$ etc. $0, 1, 2, 3,$ etc. équivalant à des lettres quelconques,

Si $0, = - \frac{1'}{1,+} \frac{2'}{2,+} \frac{3'}{3,+} \ldots \frac{n-1'}{n-1,+} \frac{n'}{n,}$;

on a

$$n, = - \frac{n'}{n-1,+} \frac{n-1'}{n-2,+} \frac{n-2'}{n-3,+} \ldots \ldots \frac{3'}{2,+} \frac{2'}{1,+} \frac{1'}{0,}$$

$n-1'$ est ici le $(n-1)$ ième numérateur et $n-1,$ le $(n-1)$ ième dénominateur: ainsi des autres.

Démonstration. Multiplions l'équation $0, = - \frac{1'}{1,+} \frac{2'}{2,+} \ldots \frac{n'}{n,}$ par le dénominateur du

membre droit, $1_1 + \frac{2'}{2_1+} \cdots \frac{n'}{n_1}$, et divisons-la par le membre gauche 0, il vient

$$1_1 + \frac{2'}{2_1+} \quad \frac{3'}{3_1+} \cdots \frac{n'}{n_1} = -\frac{1'}{0_1}, \text{ et en transposant}$$

$$1_1 + \frac{1'}{0_1} = -\frac{2'}{2_1+} \quad \frac{3'}{3_1+} \cdots \frac{n'}{n_1}.$$

Multiplions encore ici par le dénominateur du membre droit et divisons par le membre gauche, nous aurons

$$2_1 + \frac{3'}{3_1+} \cdots \frac{n'}{n_1} = -\frac{2'}{1_1+} \quad \frac{1'}{0_1}, \text{ et par la transposition:}$$

$$2_1 + \frac{2'}{1_1+} \quad \frac{1'}{0_1} = -\frac{3'}{3_1+} \quad \frac{4'}{4_1+} \cdots \frac{n'}{n_1}.$$

La répétition du procedé procure

$$3_1 + \frac{3'}{2_1+} \quad \frac{2'}{1_1+} \quad \frac{1'}{0_1} = -\frac{4'}{4_1+} \cdots \frac{n'}{n_1}; \text{ puis}$$

$$4_1 + \frac{4'}{3_1+} \cdots \frac{1'}{0_1} = -\frac{5'}{5_1+} \cdots \frac{n'}{n_1}$$

Comme la marche est uniforme, on obtient finalement

$$n_1 + \frac{n'}{n-1_1+} \quad \frac{n-1'}{n-2_1+} \cdots \frac{1'}{0_1} = 0, \text{ et}$$

$$n_1 = -\frac{n'}{n-1_1+} \quad \frac{n-1'}{n-2_1+} \cdots \frac{1'}{0_1}$$

§. 13. *Problème.* Sommer

$$\frac{n'}{n-1_1+} \quad \frac{n-1'}{n-2_1+} \quad \frac{n-2'}{n-3_1+} \cdots \frac{2'}{1_1+} \quad \frac{1'}{0_1}$$

En commençant la sommation de bas en haut on tient successivement,

Dénominateurs	0,1′	Numérateurs
	1′ | 0,2′	
	210,+2,1′ | 0,2′	10,3′+31′
3210,+32,1′+31′		210,4′+24,1′
30,2′		04,2′
10,3′		
43210,+432,1′+4,31′		3210,5′+32,51′+531′
430,2′	2,41′	30.52
410,3′	0,42′	10,53′
210,4′		
543210, +5432,1′+54,31′+531′		43210,6′ +432,61′+4,631′
5430,2′	52,41′	430,62′ 2,641′
5410,3′	50,42′	410,63′ 0,642′
5210,4′	32,51′	210,64′
3210,5′	30,52′	
10,53′		
6543210, +65432,1′+654,31′+6,531′		543210,7′ +5432,71′+54,731′+7
65430,2′	652,41′ 4,631′	5430,72′ 52,741′
65410,3′	650,42′ 2,641′	5410,73′ 50,742′
65210,4′	632,51′ 0,642′	5210,74′ 32,751′
63210,5′	630,52′	3210,75′ 30,752′
43210,6′	610,53′	10,753′
	432,61′	
	430,62′	
	410,63′	
	210,64′	

Et ainsi de suite. Pour simplifier je n'ai emplo les traits distinctifs de numérateur et dénominateur qu dernier chiffre de chaque produit. Ces fractions so mées sont les valeurs respectives de 1, 2, 3, 4, 5, 6, De leur construction on conclut

$$\left[\begin{array}{l} n-2.n-3..0,m' + \overset{n-2.n-3..2,\ \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n.n-2'} \\ + \overset{n-2.n-3..4,\ \ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots n.n-2.n-4'} \\ + \overset{n-2.n-3..6,\ \ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots n.n-2.n-4.n-6'} + \text{etc.} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} n-1.n-2..0, + \overset{n-1.n-2..2,\ \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots n-1'} \\ + \overset{n-1.n-2..4,\ \ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots n-1.n-3'} \\ + \overset{n-1.n-2..6,\ \ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots n-1.n-3.n-5'} + \text{etc.} \end{array}\right]$$

Les colonnes de doubles produits sont represen ées ici par le premier produit des dénominateurs, et le dernier produit des numérateurs. On trouvera les produits, non entendus au moyen des règles suivantes où les mots de chiffres supérieurs sont pour les numérateurs et les inférieurs pour les dénominateurs.

1°. Diminuez dans le produit exprimé le chiffre de la droite de $\frac{1}{2}$ jusqu'à ce que vous parveniez à $\frac{1}{0}$.

2°. Diminuez le second chiffre de $\frac{1}{2}$ et posez à sa droite un chiffre moindre de $\frac{2}{1}$.

3°. Repetez ici la règle 1re, puis la 2me et continuez jusqu'à exhaustion.

4°. Diminuez le troisième chiffre de $\frac{1}{2}$ et posez à sa droite deux chiffres progressivement moindres de $\frac{2}{1}$. Sur ces deux chiffres exécutez les règles 1e, 2e, 3e.

5°. Diminuez le quatrième chiffre de $\frac{1}{2}$ et posez à sa droite trois chiffres progressivement moindres de $\frac{2}{1}$, sur lesquels, vous exécuterez les règles précédentes.

6°. Continuez de la sorte et mettez les produits obtenus l'un $\frac{\text{sur}}{\text{sous}}$ l'autre. Joignez la colonne des dénominateurs à celle des numérateurs, et la colonne totale sera *construite*.

Un coup d' oeil attentif et surtout quelques tr scriptions enseigneront mieux le procédé q e ces rè longues à énoncer et difficiles à retenir. Jamais l' ana différentielle ne découvrirait cette loi que HINDENBOU et BURCKHARDT on trouvée un peu différemment.

§. 14. *Problème.* Déterminer le n^{ieme} dénominat N de la fraction continue des fonctions indépendant

$$Fx - Fa = \frac{{}^{1}Fx}{A+}\,\frac{{}^{2}Fx}{B+}\,\frac{{}^{3}Fx}{C+}\ldots\frac{{}^{n-1}Fx}{M+}\,\frac{{}^{n}Fx}{N+}\,\frac{{}^{n+1}Fx}{O+}\,\text{e}$$

Soit ${}^{n+1}Fx = o$, on a $x = {}^{n+1}F^{-1}o$, valeur censée co nue. $\frac{{}^{n+1}Fx}{o+\text{etc.}}$ s'évanouissant par cette supposition

$$Fa - Fx = -\frac{{}^{1}Fx}{A+}\,\frac{{}^{2}Fx}{B+}\ldots\frac{{}^{n}Fx}{N}$$ devient par §.

$$N = -\frac{{}^{n}Fx}{M+}\,\frac{{}^{n-1}Fx}{L+}\,\frac{{}^{n-2}Fx}{K+}\ldots\frac{{}^{3}Fx}{B+}\,\frac{{}^{2}Fx}{A+}\,\frac{{}^{1}Fx}{Fa-}$$

en y changeant x en ${}^{n+1}F^{-1}o$.

Cette solution simple d'un problème si illimité utile autant que neuve.

Application très particulière.

$$Fx = Fo + \frac{x}{A+}\,\frac{x}{B+}\,\frac{x}{C+}\,\frac{x}{D+\text{etc.}}$$ donne

$$N = -\frac{1}{M+}\,\frac{2}{L+}\,\frac{3}{K+}\ldots\frac{n-2}{B+}\,\frac{n-1}{A+}\,\frac{n}{Fa-}$$

§. 15. Si ${}^{n+1}Fx = o$ annulle toutes les fonctions cédentes, il faut sommer la fraction continue valeur N, et la différentier haut et bas n fois selon x. §. 13. nous en fournit les moyens.

Exemple le plus particulier. Développer Fx en fraction continue à numérateurs x: c'est à dire

$$Fx = F0 + \frac{x}{A+} \quad \frac{x}{B+} \quad \frac{x}{C+} \text{ etc.}$$

Les formules combinatoires du §. 13. différentiées des deux parts, donnent, en nous souvenant que $1'$ 2 $3'$ etc. sont tous égaux à x et qu'on a $0, = F0 - Fx$, $1, = A$, $2, = B$, $3, = C$, etc.

$$A = \frac{1}{F0}, \quad B = -\frac{2.{}_1F0}{A.{}_2F0}, \quad C = -\frac{3A.{}_3F0}{AB.{}_3F0 + 3.{}_2F0}$$

$$D = -\frac{4AB.{}_3F0 + 6.{}_2F0}{ABC.{}_4F0 + 4(A+C).{}_3F0}$$

$$E = -\frac{5ABC.{}_4F0 + 10(A+C).{}_3F0}{ABCD.{}_5F0 + 5(AB+AD+CD).{}_4F0 + 10.{}_3F0}$$

et ainsi de suite: nous savons la loi des coefficiens littéraux et numériques des quantités différentielles. ${}_1F0$ équivaut $\frac{dFx}{dx}$ pour $x = 0$ après la réduction; ${}_2F0$ est $\frac{d^2Fx}{dx^2}$ à la même condition, etc.

On trouve de la sorte

$$\text{Atang}\,(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{x}{1+} \quad \frac{x}{3+} \quad \frac{4x}{5+} \quad \frac{9x}{7+} \quad \frac{16x}{9+} \quad \frac{25x}{11+} \text{ etc.}$$

Exemple plus étendu. De $fx = 0$ conclure Fx en fraction continue d'une arbitraire.

$$Fx = Fa + \frac{fx - fa}{A+} \quad \frac{fx - fa}{B+} \quad \frac{fx - fa}{C+} \text{ etc.}$$

à mêmes coefficiens qu'en haut; à cela près que $0 = \frac{dFa}{dfa}$, ${}_2F0 = \frac{d^2Fa}{dfa^2}$, et ainsi de suite. En supprimant fx nulle par supposition, reste

$$Fx = Fa - \frac{fa}{A -} \quad \frac{fa}{B -} \quad \frac{fa}{C -} \quad \frac{fa}{D -} \text{ etc. R}$$

de suite en fraction continue.

§. 16. *La Produite* $\frac{Fx}{Fa} = (1 + AF^{1}x)(1 + BI$

$\ldots(1 + NF^{n}x)$ etc. se traite à peu près de même. ai assez dit pour une simple esquisse. Ayant donné d sultats moins limités que ceux connus jusqu' aujour j' espère avoir justifié le tître de Développe n général. On me dispensera ici de l'appliquer à sieurs variables et de montrer au long l'emploi des ctions indépendantes qui rendent le calculateur n de chaque terme de la suite, sans que la loi se perd réserve ces details et l' amplification de la mé pour un traité d' Analyse fonctionnaire. c prouverai, s'il en est encore besoin, que les pro combinatoires, moins bornés et ordinairement plu rects que les différentiels, ne sont pas moins rigo c' est à dire, analytiques.

Sans l'analyse combinatoire, manifeste ou dégu le calcul fonctionnaire n'est qu'un chaos des réduc décourageantes. Oserai-je le dire? Sans l'amal complet des deux méthodes la logique mathémat qu'on nomme vaguement ANALYSE n'atteindr mais la perfection dont elle est susceptible.

III.

LYNOME COMBINATOIRE.

roudra bien me permettre quelques considérations
ninaires.

e nombre est une réponse à la que-
n: combien? D'après cette definition tirée
nature de la quantité directe et intelligible pour
emonde, non seulement 0, 1, 2, 3, etc., $\frac{1}{2}$, $3\frac{4}{5}$,
∞, -1, $\sqrt{-1}$, etc., mais encore tant, plu-
rs, quelque, etc., sont des nombres.

u lieu d'écrire et de prononcer au long, un nombre
lconque, un autre nombre quelconque,
troisième nombre quelconque, etc., les
stes modernes se servent des lettres alphabétiques
courant au besoin à différens alphabets, à des traits,
oints et chiffres distinctifs. Quelque commode que
et expédient, sur tout pour l'impression, les chif-
enfermés dans un angle, un arc de cercle ou autre
simple, sont bien supérieurs: en rendant l'algè-
oute numérique, ils aident l'oeil à découvrir les
compliquées. Les Arabes se servirent, je crois,
premiers de ces symboles parlans qu'on a laissé
er en désuétude, faute de connaître leurs avantages.
NITZ et NEWTON ont cherché à les faire revivre pour
res usages: mais heureusement on ne les a pas imi-
et ces signes sont en ce moment une terre vierge,
on peut tirer un meilleur parti, comme on le ver-
ns mon Essai de Caractéristique Combi-
oire.

Les abbréviations méthodiques étant l'âme du cul, celles dont se sert Diophante sont assûrement anciennes; et malgré cela notre algèbre a été tan siècles à se former, parce que les progrès de l'e humain ne se font jamais par sauts considérables. A tous que beaucoup d'idées fécondes meurent dan tête ou le portefeuille des auteurs, et que publiée monde savant n'y fait souvent pas de longtems a tion.

CARNOT, dans sa Théorie des machines, soupço qu'une révolution aussi heureuse que celle qu' a c gé la face de la Chymie, attend les Mathématiq Dans une science où le fond n'est pas susceptible changement, elle ne peut avoir lieu que pour la racteristique écrite et parlée, et tout au plus pour méthode plus lumineuse dans les élémens: on sent puis longtems que ceux-ci pourraient être à la fois riches et moins volumineux, et que les idées y pourai quelques fois être mieux fixées. Ce n'est qu'en fectionnant la science combinatoire qu'on y parvien

Chiffre signifie en général un signe de quan élémentaire, commode pour la combinaison. Les c fres arithméthiques, liés par des conditions de num tion, sont les élemens du nombre ordinaire: les lett symboles de nombres indéterminés, constituent de même manière les élémens de la fonction. Sous aspect les lettres de l'analyste sont des chiffres gébriques, ses fonctions sont des nc bres algébriques; et l'algèbre, ou plûtôt l'anal est réellement une arithmétique universelle, com NEWTON la nomma. Il s'ensuit encore qu'une fonc est le résultat éventuel de certaines opérations numé ques à faire avec des nombres, dont on considère un plusieurs comme variables, c'est à dire, susceptibles valeurs arbitraires.

fin de mieux comparer les nombres et les combi-
plus facilement, l'arithméticien les ordonne en
les puissances de dix, et l'algébriste les dévelop-
linairement en série d'une variable. Je dis, ordi-
ient; car souvent d'autres développemens méri-
préférence.

l'on compte pour rien les longueurs, le binome
nien suffit pour exécuter tous les développemens:
rème de TAYLOR aux différences finies en est une
et utile généralisation, quoiqu'il n'évite pas
rs les circuits et qu'il laisse souvent échapper la
e calcul des différences de toute espèce n'a point
e base. Une méthode développatoire plus sûre
nalyse Combinatoire ou l'Arithmétique uni-
elle ordinale, en prenant ordinal dans le
plus étendu, comme adjectif d'ordre. Ce rap-
ment, que personne que je sache n'a encore fait,
nz semble l'avoir senti, à en juger par divers pas-
le ses oeuvres, par les coefficiens qui portent son
t par son projet d'une idéographie numérique, au
de laquelle il se promettait de calculer le raison-
t. Cette ouverture fût suivie en partie par Moi-
Bernoulli et Boscowich; mais le Professeur
enbourg, qui pour l'étendue et la facilité des
és laissa ses dévanciers si loin derrière lui qu'on
ire qu'il a inventé l'Analyse Combinatoire, réa-
premier l'idée confuse de LEIBNITZ, en rappel-
ites les règles fondamentales de la science a con-
des nombres avec des chiffres donnés, indivi-
nent ou en somme. Pour conserver à cette con-
ion toute la généralité qui lui convient, il faut
e etc. $+ 10^{2a} + 10^{a} + 1 + 10^{-a} + 10^{-2a} +$ etc.
chelle de numération. En pratique a passe rare-
ou 2.

Après l'exécution arithmographique des règ combinatoires, HINDENBOURG a donné la lexic graphique, qui ordonne les files égales ou inég comme les mots d'un dictionnaire, et la stélég phique, qui assemble les files horisontales d'après qu que loi dans les rangs verticaux. En attendant que fasse mieux connaître ces différens procédés, je rem querai que tous constituent un Calcul ordinal, des rapports de situation, absolument indépendant l'analyse vulgaire, sans pourtant lui devenir étran J'avertis les personnes curieuses d'étudier la triple m thode de HINDENBOURG dans les ouvrages mêmes ce savant, que ses premiers *) n'en contiennent que germe et n'ont plus en ce moment qu'une valeur storique. Le perfectionnement de l'Analyse Combin toire se trouve dans les cahiers de l'Archive math matique, dont l'onzième a paru cette année, dans première et seconde Sammlung combinatorisch analytischer Abhandlungen, publiées par HI DENBOURG et imprimées à Léipsic dans ces derni tems. Les étrangers, qui ne savent pas l'allema langue aujourdhui si nécessaire à tous les gens des l tres, peuvent y suppléer par les Disquisitiones analyticae du Professeur PFAFF, ouvrage qui a ob nu l'estime générale et qui contient près de cent pag sur cette matière.

Dans mon Traité d'Analyse fonctionnaire combinatoire, assez avancé déja pour voir pe être bientôt le jour, j'ai tâché d'étendre le doma des combinaisons, en les alliant intimement avec le c cul des différences. J'ai surtout été soigneux de s

*) Infinitinomii dignitatum historia, leges ac formulae; G tingae 1779. Novi systematis permutationum, combination ac variationum primae lineae; Lipsiae 1781, etc.

…er les deux analyses, en dégageant leurs avenues, de …aines épines qu'on leur reproche. En disant ceci, …e prétens certainement pas jetter de l'ombre sur les …aux de mes prédécesseurs à qui je dois tout; je ne …x qu'annoncer le point de vue de mon traité. La ré…tion des découvertes d'autrui est si peu de chose en …e même, que pour se la faire pardonner du public, il …t dumoins améliorer ou faciliter la forme. Au com…encement d'une science tout est important et on ne …rait être trop détaillé: mais a-t-elle pris consistance …vent-on la présenter en corps de doctrine, il faut …ancher à une précision énergique et supprimer les …ssoires stériles: sinon, chaque méthode devient …e bibliothéque, et le studieux perd le courage de …diner; principalement de nos jours, où l'homme …e lettres doit savoir un peu de tout, c'est à dire, une …finité de choses. C'est plus que jamais l'occasion …e s'écrier avec Hippocrate:

Ὁ μὲν βραχὺς, ἡ δὲ τέχνη μακρὴ, ἡ δὲ κρίσις χαλεπή.

Mon traité, comme ouvrage étendu, n'est pas tout …it dans le goût de l'échantillon combinatoire, que …offre en attendant aux amateurs étrangers, et qui n'em…asse que cette proposition:

Dans $F(a+bx+cx^2+\text{etc.}) = Fa + A\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + C\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ déterminer immédia…ent le coefficient général N.

Le Professeur ARBOGAST a récemment résolu le …oblême avec une élégance qui laisse peu à désirer. …transformation des quantités indépendantes c, d, e, … en Dériv…es de b, et de les différentier comme si …une différence n'était constante, pour remettre succes…vement c, d, etc. à la place de leurs équivalens dif…rentiels, est une idée éminemment ingénieuse. Cela

n'empêche point que les procédés directement conjonctoires de HINDENBOURG ne mènent encore plus vîte au but. Montrons le, mais auparavant voyons jusqu'où parvient le simple calcul différentiel, afin qu'on puisse mieux juger de la différence des méthodes.

§. 1. En supposant $b+cx+dx^2+\text{etc.}=fx$, $\frac{dFa}{da}=A'$, $\frac{d^2Fa}{da^2}=B'$, $\frac{d^3Fa}{da^3}=C'$, etc., le théorême de TAYLOR donne

$$F(a+xfx)=Fa+A\frac{x}{1}+B\frac{x^2}{1.2}+C\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$
$$=Fa+A'\frac{xfx}{1}+B'\frac{(xfx)^2}{1.2}+C'\frac{(xfx)^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Cette équation différentiée n fois selon x, devient

$$N+O\frac{x}{1}+P\frac{x^2}{1.2}+\text{etc.}=\frac{A'}{1}\frac{d^n(xfx)}{dx^n}+$$
$$+\frac{B'}{1.2}\frac{d^n(x^2fx^2)}{dx^n}+\ldots$$
$$+\frac{N'}{1.2..n}\frac{d^n(x^nfx^n)}{dx^n}+\text{etc.}$$

d'où par x nul, condition qui annulle

$$d^n(x^{n+r}fx^{n+r}):dx^n,$$

$$N=\frac{A'}{1}\frac{d^n(ofo)}{do^n}+\frac{B'}{1.2}\frac{d^n(o^2fo^2)}{do^n}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{N'}{1.2\ldots n}\frac{d^n(o^nfo^n)}{do^n},$$

le o signifiant ici, qu'on change x en o après la différentiation. Par le théorême $d^n(pq)=p\,d^nq+$ $+\frac{n}{1}dp.d^{n-1}q+\text{etc.}$ nous obtiendrons enfin cette expression simplifiée:

$$N = \frac{n}{1} \cdot \frac{A'}{1} \frac{d^{n-1} f o}{d o^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$\frac{d^{n-2} f o}{d o^{n-2}} + \ldots + \frac{N'}{1.2.\ldots n} f o^n. \qquad (I$$

Si nous différentions $Fa + A\frac{x}{1} + \text{etc.} = Fa + zfx + \text{etc.}$ n fois selon $d(xfx)$ constante, l'annulation de x procure $\frac{A}{1} \frac{d^n o}{d(ofo)^n} + \frac{B}{1.2} \frac{d^n . o^2}{d(ofo)^n} + \ldots$

$$\ldots + \frac{N}{1.2.\ldots n} \frac{d^n . o^n}{d(ofo)^n} = N'.$$

Remarquons que pour le cas de $x = o$, la formule conversionnelle (Dev. gén. §. 6.) change

$$\frac{d^n . x^r}{d(xfx)^n} \text{ en } \frac{d^{n-1}\left[\frac{d . x^r}{dx}\left(\frac{x-o}{xfx-ofo}\right)^n\right]}{dx^{n-1}}$$

$$= \frac{r d^{n-1}\left[x^{r-1} . fx^{-n}\right]}{dx^{n-1}}, \text{ en}$$

réduisant et nous souvenant que x seul est soumis à la différentiation. Le théorème $d^n(pq) = p d^n q + \text{etc.}$ et la substistution finale de o à x changeront cette forme en $r(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \frac{d^{n-r} . fo^{-n}}{do^{n-r}} = \frac{d^n . o^r}{d(ofo)^n}$. Prenons successivement $r = 1, = 2$, etc. et substituons, il vient enfin

$$N' = A \frac{d^{n-1} . fo^{-n}}{do^{n-1}} + \frac{n-1}{1} \cdot B \frac{d^{n-2} . fo^{-n}}{do^{n-2}} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \cdot C \frac{d^{n-3} . fo^{-n}}{do^{n-3}}$$

$$+ \ldots + N . fo^{-n}. \qquad (II$$

Les rélations réciproques I et II sont remarquables en ce que F et f caractérisent des fonctions quelconques.

L'évaluation de $\frac{d^{n-r}.fo^n}{do^{n-r}}$ et $\frac{d^{n-r}.fo^{-n}}{do^{n-r}}$ se réduit a élever $fx = b + cx + dx^2 +$ etc. aux puissances r et $-n$ pour ne conserver des développemens respectifs que le coefficient de x^{n-r} multiplié par 1.2.3..n−1. Au moyen du calcul différentiel on obtient assez facilement ce coefficient en série récurrente: mais comme ce n'est pas ce que nous voulons, passons aux procédés combinatoires.

§. 2. Le développement de fo^r se chargeant de coefficiens numériques qui embrouillent bientôt la loi, par tons d'un produit de séries différentes, et pour rendre l'execution typographique moins sujette à equivoque prenons X pour variable. Nous aurons tant de séries que nous voudrons au moyen de la notation suivante et coefficiens Leibnitziens.

$$\overset{q}{X} = \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \overset{q}{3}.X^3 + + \overset{q}{N}.X^N + \text{etc.} \;*)$$

N sera tonjours le coefficient de X^N. La série définie

$$\overset{q}{t}.X^t + .\overset{q}{t+1}.X^{t+1} + .\overset{q}{t+2}.X^{t+2} + + \overset{q}{u}.X^u$$

s'indiquera par $t\overset{q}{X}u$, et son coefficient général par $t\overset{q}{N}u$. Dans cette expression je nommerai constamment q la

Pour faciliter aux étrangers la lecture immédiate des ouvrages combinatoires de HINDENBOURG, j'expliquerai sa notation aux endroits convenables de cet écrit, qui en deviendra d'autant plus intelligible pour les géomètres - combinateurs allemans. $\varkappa 1$, $\varkappa 2$.. $\varkappa n$ designent Coefficient premier, second... nieme

*) $\overset{q}{X} = \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + + \overset{q}{N}.X^N +$ etc. est chez HINDENB $p = \varkappa 1.x + \varkappa 2.x^2 +$ etc. et $\overset{n}{N}$ est $p\varkappa n$ chez lui.

$\overset{q}{X}^{(d)}_{u} = .t.\overset{q}{X}^t + .\overset{q}{t+d}.X^{t+d} + + \overset{q}{u}.X^u$ est chez H

$y = Ax^m + Bx^{m+d} + + \overset{nd}{A}x^{m+nd} +$ etc.

arque, t et u les indíces. La marque équivaut des traits. $\overset{4}{N} = N''''$.

Si la différence des exposans était d, on noterait ${}_t\overset{q}{X}{}^{(d)}_u$ et ${}_t\overset{q}{N}{}^{(d)}$. Ces formes sont un peu chargées, rce qu' elles apprennent cinq circonstances de la série.

Exemples. $\overset{0}{X} = \overset{0}{1}.X + \overset{0}{2}.X^2 + \overset{0}{3}.X^3 + \text{etc.},$

$${}_2\overset{1}{X} = \overset{1}{2}.X^2 + \overset{1}{3}.X^3 + \overset{1}{4}.X^4 + \text{etc.},$$

$${}_0\overset{2}{X}{}_3 = \overset{2}{0} + \overset{2}{1}.X + \overset{2}{2}.X^2 + \overset{2}{3}.X^3 +,$$

$$\overset{\bar{}}{X}{}^{(3)}_{10} = \bar{1}.X + \bar{4}.X^4 + \bar{7}.X^7 + \bar{10}.X^{10},$$

$${}_5\dot{X}{}^{(\not{7})}_{\not{9}} = \dot{5}X^5 + \dot{2}.X^{-2} + \dot{\not{9}}.X^{-9};$$

Les chiffres barrés, dont on ne se sert plus dans la division, signifient chez moi des chiffres négatifs. Ainsi $\not{4}$, $\not{5}$, $\not{7}$, $\not{9}$, équivalent à -2: -5, -7, -9; $8008008 = 7991992$, $L\frac{1}{2000} = \not{3},3010300$. La caractéristique barrée n'induit jamais les commençans en erreur comme le complément arithmétique. Je donnerai dans une autre occasion le calcul extrêmement rapide des chiffres négatifs, par lequel on extrait en trois minutes une racine quarrée de douze figures.

§. 3. Pour abréger avec clarté une fonction d'une ou de plusieurs séries marquées, je surmonterai leur variable commune de la même fonction de leurs marques: moyennant quoi

$$F\overset{q}{X} = \overset{Fq}{X} = \overset{Fq}{0} + \overset{Fq}{1}.X + \overset{Fq}{2}.X^2 + + \overset{Fq}{N}.X^N + \text{etc.} \quad *)$$

$\overset{Fq}{N}$ est donc le coefficient de X^N dans le développe-

*) $F\overset{q}{X} = \overset{Fq}{X} = \text{etc.} + \overset{Fq}{N}.X^N + \text{etc.}$ est chez H.

$Fp = \varkappa 0 + \varkappa 1.x + \varkappa 2.x^2 + \text{etc.}$ et mon $\overset{Fq}{N}$ est son $(Fp)\varkappa\varkappa$.

ment de la fonction d'une série dont les coefficiens sont marqués de q traits.

$$\overset{p}{F}(\overset{q}{X},\overset{q}{X}) = \text{etc.} + \overset{F(p,q)}{N}.\,X^N + \text{etc.}$$ Ainsi de suite

Exemples.

$$\overset{p}{X}.X = \overset{pq}{X} = \overset{pq}{2}.X^2 = \overset{pq}{3}.X^3 + + \overset{pq}{N}.X^N + \text{etc.}$$

$$\overset{p}{X}.\overset{q}{X} = \overset{p:q}{X} = \overset{p:q}{0} + \overset{p:q}{1}.X + \overset{p:q}{2}.X^2 + + \overset{p:q}{N}.X^N + \text{etc.}$$

$$\overset{r}{X}.\overset{r-1}{X}.\overset{r-2}{X}\ldots\overset{1}{X} = \overset{r..1}{X} = r.X^r + .\overset{r..2}{r+1}.X^{r+1} + + \overset{r..1}{N}.X^N + \text{etc}$$

En prenant toutes les marques q, ce produit de séries devient une puissance et on a

$$(\overset{q}{X})^r \text{ ou } \overset{q}{X}{}^r = \overset{q^r}{X} = r.X^r + .\overset{q^r}{r+1}.X^{r+1} + + \overset{q^r}{N}.X^N + \text{etc}$$

$$(\overset{q}{{}_0X})^{-r} \text{ ou } {}_0\overset{q}{X}{}^{-r} = {}_0\overset{q^{-r}}{X} = 0 + 1.X + 2.X^2 + + .{}_0\overset{q^{-r}}{N}.X^N + \text{etc}$$

L se lisant „*Logarithme naturel de*" $L^2 a$ est, par les principes fonctionnaires du Développement général, la même chose que LLa et $L^{-1}a$ équivaut à $2{,}71828183^a$. Ceci suffit pour comprendre

$$L(\overset{q}{{}_0X}) = {}_0\overset{Lq}{X} = 1.X + 2.X^2 + + .{}_0\overset{Lq}{N} + \text{etc.}$$

$$L^{-1}(\overset{q}{X}) = \overset{L^{-1}q}{X} = 1 + 1.X + 2.X^2 + + N.X^N + \text{etc}$$

Voilà assez d'éclaircissemens. Ma tachygraphie parlante, où chaque coefficient porte sa généalogie au front, est analytique autant que combinatoire. Dans l'Essai de Caractéristique Combinatoire ouvrage dont je grave actuellement les planches, j'ai étendu cette notation à plusieurs variables, et au moyen du cadre $\boxed{\ }$, je l'ai tellement preservée d'équivoque qu'on peut, dans les grands calculs, mêler, sans avertissement, les fonctions combinatoires avec les fonctions analytiques ordinaires. Les formes tronquée

x quelles m'oblige l'impression, me suffisent aujourdhui, et avec un peu d'attention le lecteur ne s'y trompera point.

$\overline{X} = \overline{1}.X + + \overline{N}.X^N + \text{etc.}$ est $\overline{|x|} = \overline{|1|}x + + \overline{|n|}x^n + \text{etc.}$

dans les formes à cadres. Mais revenons à $\overset{r..1}{N}$ et $\overset{qr}{N}$.

§. 4. Dans $\overset{r..1}{X} = \overset{r..1}{r}.X^r + .\overset{r..1}{r+1}.X^{r+1} + + \overset{r..1}{N}.X^N + \text{etc.}$*)

$\overset{r..1}{N}$ consiste en une somme de produits r^{naires} ou de r facteurs, et la somme des numéros de chaque r^{naire} y est toujours l'exposant de X^N. Il n'y a donc qu'à écrire tous le nombres r^{naires} à somme N des chiffres, les surmonter par ordre des marques r, $r-1$, $r-2$, jusques 1, et leur préposer enfin $+$, pour avoir la valeur de $\overset{r..1}{N}$. Les chiffres dont je parle appartiennent à l'échelle etc. $+10^{2a} + 10^a + 1$.

Exemple 1^r. On demande le coefficient de X^7 du développement de

$$\overset{3..1}{X} = (\overset{3}{1}.X + \overset{3}{2}.X^2 + \text{etc.})\ (\overset{2}{1}.X + \text{etc.})\ (\overset{1}{1}.X + \text{etc.}).$$

$N = 7$ donne ici

$$\overset{3..1}{7} = + \overset{3\,2\,1}{115} + \overset{3\,2\,1}{214} + \overset{3\,2\,1}{412} + \overset{3\,2\,1}{511}.$$

124	223	421	
133	232		
142	241		
151			

Les marques 3, 2, 1 et le signe $+$ sont censés répétés à chaque produit. Je l'avertis une fois pour tou-

*) $\overset{r..1}{X} = \overset{r..1}{r}.X^r + + \overset{r..1}{N}.X^N + \text{etc.}$ est chez H.

$\varkappa..rqp = \varkappa r.X^r + \varkappa(r+1).X^{r+1} + \text{etc.}$, et $\overset{r..1}{N}$ est chez lui $(\varkappa..qp)\varkappa n$ en avertissant que les séries multipliées sont au nombre de r.

tes. On sait que $^{3\,2\,1}_{1\,1\,5} = 1.1.5$, et ainsi des autres. La suppression des points ne peut occasionner de l'ambiguité.

Quant à la meilleure manière de trouver tous les nombres r^{naires} à somme donnée des chiffres, c'est d'écrire, comme j'ai fait, d'abord le plus petit nombre, puis l'immédiatement plus grand, puis le suivant; et continue de la sorte jusqu'à ce qu'on parvient au premier r^{naire} renversé, et il en résulte une Colonne rangée, c'est à dire, de nombres ascendans. Lorsque la colonne devient longue, on peut la rompre en sections.

Cette solution du problème ne laisse rien à désirer pour la simplicité: elle est, comme on voit, une conséquence de ma notation Leibnitzienne, qui, pour être à la fois analytique et combinatoire, ne demande ni traduction ni explication.

$^{p\ p}_{1,2}$, etc.; $^{q\ q}_{1,2}$, etc., équivalent à a, b, etc. marqués de p ou q traits, avec la différence pourtant que les nombres constituent un ordre plus expressif que celui des lettres, et que leur suite n'est pas bornée comme celle des alphabets. *) La marque empêche de confondre le coefficient Leibnitzien, nombre quelconque, avec les nombres vulgaires, et $3.\frac{9}{8}$ n'en est pas moins clair que $3h''''''''''$ ou $3h^{IX}$. Ici il faut même souvent un d'avertissement pour discerner l'indice d'avec un exposant.

*) HINDENBOURG qui a su tirer tout le parti possible des lettres, aggrandit indéfiniment les alphabets, en notant $\overset{+q}{N}$ la q^{ieme} lettre après N, et $\overset{-q}{N}$ la q^{ieme} lettre précédente. Dans ma notation à cadres ce serait $|n+q|$ et $|n-q|$; $|n|$ équivalant à N.

Exemple 2e. Construire le coefficient de X^{22} dans développement de $X^{\overset{4..1}{(3)}}_{10} =$

$$(1.X + 4.X^4 + 7.X^7 + 10.X^{10})^4 (1.X + + 10.X^{10})^3 (1.X + \text{etc.})^2 (1.X + \text{etc.})^1.$$

Ce coefficient est $22^{\overset{4..1}{(3)}}_{10} =$

4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 2	4 3 2 2
1.1.10.10	+ 4.1.7.10	+ 7.1.4.10	+ 10.1.1.10
1.4.7.10	4.1.10.7	7.1.7.7	10.1.4.7
1.4.10.7	4.4.4.10	7.1.10.4	10.1.7.4
1.7.4.10	4.4.7.7	7.4.1.10	10.1.10.1
1.7.7.7	4.4.10.4	7.4.4.7	10.4.1.7
1.7.10.4	4.7.1.10	7.4.7.4	10.4.4.4
1.10.10	4.7.4.7	7.4.10.1	10.4.7.1
1.10.4.7	4.7.7.4	7.7.1.7	10.7.1.4
1.10.7.4	4.7.10.1	7.7.4.4	10.7.4.1
1.10.10.1	4.10.1.7	7.7.7.1	10.10.1.1
	4.10.4.4	7.10.1.4	
	4.10.7.1	7.10.4.1	

§ 5. $\overset{q^t}{N}$, coefficient général du développement de $=(1.X + \overset{q}{2}.X^2 + \overset{q}{3}.X^3 + \text{etc.})^r$ ne differe de $\overset{r..1}{N}$, qu'en que toutes les marques sont q, ce qui rend égaux facteurs à même numéro. Il suffira donc d'écrire r^{naires} rangés, à somme N des numéros-chiffres, en posant à chaque r^{naire} le + et le nombre des permutations, dont ses numéros sont susceptibles.

J'entens par r^{naire} rangé un nombre de r chiffres dans lequel un chiffre moindre ne suit jamais un plus grand 2359, 6666, 4477 sont des 4^{naires} rangés;

844223 est un 6^{naire} rangé à rebours; 511, 1409 ne sont rangés dans aucun sens.

Exemple 1r. On veut savoir le coefficient du développement de $\overset{q^3}{X} = (\overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \text{etc.})$ forme du paragraphe précédent, nous donne t suite en employant les coefficiens numériques mutations,

$$\overset{q^3}{7} = 3.\overset{q\,q\,q}{1\,1\,5} + 6.\overset{q\,q\,q}{1\,2\,4} + 3.\overset{q\,q\,q}{1\,3\,3} + 3.\overset{q\,q\,q}{2\,2\,3}$$

$$= 3.\overset{q}{1}^2.\overset{q}{5} + 6.\overset{q\,q\,q}{1.2.4} + 3.\overset{q\,q}{1.3}^2 + 3.\overset{q}{2}^2.3$$

C'est sans doute une précaution superflue que tir que $\overset{q}{1}^2$ et $\overset{q}{3}^2$, quarrés de $\overset{q}{1}$ et $\overset{q}{3}$, ne doivent prendre pour $\overset{q^2}{1}$ et $\overset{q^2}{3}$, coefficiens du développ de $\overset{q^2}{K} = (\overset{q}{1}.X + \text{etc.})^2$.

Exemple 2d. Dans $\overset{q^2}{X}{}^{(3)}_{10}$ déterminer le coef de X^{22}. Il est, en mettant un coefficient de permu à chaque 4^{naire} rangé du second exemple du

$$\overset{q}{2}{}^{(3)}_{10} =$$

$$6.\overset{q\,q}{1^2}.10^2 + 24.\overset{q\,q\,q\,q}{1.4.7}.10 + 4.\overset{q\,q}{1.7^3} + 6.\overset{q\,q}{4^2}.7^2 + 4.\overset{q}{4^3}.$$

Dans ces deux exemples nous avons déd coefficiens numériques 3, 6, 3, 3 et 6, 24, 4, de la permutation réelle. Comme ce procédé m bientôt des bornes aux solutions praticables, on combien il serait avantageux de n'écrire que les numéros nombres rangés et de leur préposer de ou avec peu de calcul, les coefficiens de permut Développons donc cette théorie, où la plus gran

alité aura encore la prérogative de mieux présenter loi.

§. 6. Arranger m chiffres différens en ires.

2^{naires}, Un des m chiffres ayant la gauche, les -1 chiffres restans formeront autant de binaires avec i. Mais chacun des m chiffres peut avoir la gauche: nc en tout $m(m-1)$ binaires possibles.

3^{naires}. Un des m chiffres ayant la gauche, les -1 restans formeront $(m-1)$ $(m-2)$ binaires à droite, et partant autant de ternaires avec lui. Et mme chaque chiffre peut avoir la gauche, le total des ires est $m(m-1)(m-2)$.

4^{naires}. Un des m chiffres ayant la gauche, les -1 reſtans formeront $(m-\ )$ $(m-2)$ $(m-3)$ naires à sa droite, et partant autant de quaternaires vec lui. Et comme chaque chiffre peut avoir la gauche, le total des 4^{naires} est $m(m-1)(m-2)(m-\ )$.

Le raisonnement demeurant le même pour les ires, 6^{naires}, etc., et le nombre des facteurs réguliè- ment decroisans étant toujours celui des places, il en ulte le théorême suivant, qui est la base de toute nalyse Combinatoire de quantité.

„*m chiffres peuvent s'arranger en n^{naires} de $m(m-1)$ $(m-2)\ldots(m-n+1)$ manières.*“

Comme on peut numéroter chaque suite d'indivi- et supposer un ordre dans des places situées où l'on it, la solution a toute la généralité imaginable. On ubliera pas que les chiffres dont je parle appartien- t au systeme 10^a.

Si la recherche du nombre des r^{naires} appartient nalyse de quantité, celle de la forme des r^{naires} du ressort de l'analyse de qualité, science qui est ore au berceau, à bien des égards.

On arrange le mieux en r^{naires} en partant toujo des chiffres les plus bas; et alors la marche que suivie en démontrant, donne une colonne ran Quand elle est construite, on verifie son éxactitude le nombre connu des arrangémens. L'exercice appr les règles partielles plus vîte qu'un énoncé verbal ne saurait être court.

Exemple d'analyse de quantité. On a les 25 tres de l'alphabet dans une urne: en tirant dix fois suite une lettre, quelle probabilité y a-t-il qu'on tiendra le mot bonefacius, dont beaucoup de m chands se servent au lieu de 0123456789 pour c tographier leurs prix?

Le nombre des 10^{naires} possibles avec 25 numér chiffres est 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16, parmi l quels il n'y a que le seul 0123456789 qui puis former bonefacius. En faisant le calcul on trouv ra donc la probabilité

1 : 1186167628799 9

Si 1000 écrivains livraient chacun 10000 dém par jour, il leur faudrait plus de 3249 années pour écrire tous.

Quand nous voyons de l'ordre dans une long suite de choses qui pourraient être disposées autrem notre raison en conclut un dessein; c'est à dire une telligence qui a présidé à leur arrangement: plus nombre des dispositions possibles est grand, plus époques où elles reviennent sont fréquentes, plus conclusion acquiert du poids. Comme tout ce nous appercevons dans le monde physique porte c ractère expressif d'ordre qui dure depuis un tems in il y a donc ∞^{∞} à parier contre 1 que l'ordre nous appercevons dans le monde n'est pas l'effet d fatalité aveugle. Mais, dit le *Système de la Na* puisque les choses doivent être arrangées de quelque

e, il ne faut pas s'étonner qu'elles le soient de la ière actuelle: tout étant conséquence de loix néces- :s, les phénomènes qui annoncent le plus de des- , tels que la structure des corps organiques, la ervation des espèces, ne sont au fond qu'un résul- urprenant obtenu par des dés pipés. L'auteur ou- que des dés pipés prouvent une intelligence qui pipés et que notre raison juge d'après la probabili- : non d'après l'événement. Aussi, malgré toutes bjections, le dessin manifeste que présente un oeil, ied, une aile, etc., démontre un être suprême. e preuve, sans contredit la meilleure de toutes, est à la théorie des combinaisons.

Exemple d'analyse de qualité. Déterminer les lgames possibles à trois, en quotités différentes don- , des métaux les plus pésans; le platine, l'or, le gstène et le mercure.

Numérotons ces métaux 1, 2, 3, 4 et désignons quotités par les marques arbitraires 1, 2, 3, nous verons 4. 3. 2 = 24 amalgames possibles, que voici:

	321	321	321	321
+	123 +	213 +	312 +	412 *)
	124	214	314	413
	132	231	321	421
	134	234	324	423
	142	241	341	431
	143	243	342	432

Si l'on refléchit que nous connaissons déja une gtaine de metaux, et que les quotités différentes va- t tant les amalgames, on sentira combien d'expérien-

*) HINDENBOURG indique ce résultat par C' [1 2 3 4]; osième lettre de l'alphabet indiquant qu'on assemble à 3. z lui N' [1 2 3 . . m] est la colonne des n^{naires} formés des fres 1 jusques m, qu'il nomme *Variationes simpliciter, omissis titionibus.*

ces il faudroit pour avoir une théorie un peu complète des composés variables 2^{naires}, 3^{naires}, 4^{naires}, etc.

§. -. *Corollaire.* Lorsque le nombre des places est celui des chiffres, l'arrangement se réduit à une simple permutation, et $m = n$ donne ce théorême secondaire „n chiffres différens produisent $1.2.3..n$ nombres n^{naires} par transposition." *)

Exemple. 0149 peuvent ainsi se permuter sur quatre places de $1.2.3.4 = 24$ manières

+ 0149	+ 1049	+ 4019	+ 9014
0194	1094	4091	9041
0419	1409	4109	9104
0491	1490	4190	9140
0914	1904	4901	9401
0941	1940	4910	9410

La seconde moitié de la colonne est la première disposée à rebours pour la suite des 4^{naires} et l'ordre de leurs chiffres.

Pour en donner une application, voyons quels sont les arrangemens permis de ces quatre mots omnia vincit labor improbus. En les numérotant 0, 1, 4, 9 nous trouverons que les 24 arrangemens ci-dessus donnent tous un sens clair. La traduction française, un travail opiniâtre surmonte chaque difficulté, et l'allemande, eine unermüdete Arbeit besiegt jede Schwierigkeit ne souffrent point de transposition: il en est de même dans toutes les autres langues européennes vivantes, les dialectes slaves exceptés, qui ont des cas réels. En conclure que le poëte latin, dont j'ai tiré cette sentence a eu dans sa langue plus souple plus de facilité à faire de bons vers que les poëtes modernes, serait assurément abuser des combinaisons. VIRGILE n'avait pour modèle

*) HINDENB. note N° [123...n] ou Perm [123...n].

sublime, mais incorrect HOMÈRE: il travailla a vie à l'Enéide et voulut qu'on la brûlât après :t; preuve que les Romains d'Auguste n'étaient ›ins délicats que nous.

8. *Corollaire.* Dans le §. 6. chaque arrange- les mêmes chiffres revient dans ses 1.2.3..n per- ons dont une seule est rangée. Le nombre des rangés est donc 1.2..n fois moindre que $m(m-1)$ $-n+1)$, et partant:

iffres différens donnent $\frac{m(m-1)(m-2)..(m-n+1)}{1.2.3...n}$ es n^{naires} rangés."

Exemple Ier.

$X = (1+\dot{1}.X)(1+\dot{2}.X)(1+\dot{3}.X)..(1+\dot{k}.X)$,
k

ficient de la puissance X^N du développement sera : à la somme des N^{naires} rangés des chiffres Leib-

ıs $\dot{1}$, $\dot{2}$,, $\dot{k}$.

i 6 = +	123456 +	125678	les points et le
8	123457	134567	+ étant censés
	123458	134568	répétés à cha-
	123467	134578	que 6^{naire}.
	123468	134678	
	123478	135678	
	123567	145678	
	123568	234567	
	123578	234568	
	123678	234578	
	124567	234678	
	124568	235678	
	124578	245678	en tout $\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}$
	124678	345678	= 28 sextinaires.

Supposons $1 = 2 = \text{etc.} = 1$, chaque N^{naire} devie dra l'unité, et on aura

$$\underset{k}{N} = \frac{k}{1} \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \frac{k-2}{3} \cdot \cdots \frac{k-N+1}{n}$$

Donc pour ce cas,

$$(1+X)^k = 1 + \underset{k}{1}.X + \underset{k}{2}.X^2 + \underset{k}{3}.X^3 + \text{etc.} \; *)$$

$$= 1 + \frac{k}{1}.X + \frac{k(k-1)}{1.2}.X^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} X^3 \text{ et}$$

Cette élégante démonstration élémentaire du binon est dûe à BERNOULLI et je n'en connais pas encore meilleure: elle suppose k entier positif, mais il e aisé de l'étendre à k négatif, rompu et même irratio nel. ARBOGAST a traité ce problême par les dérivation page 74 et 75.

Exemple 2^d. Une application non moins connu mais qu'il est bon de repéter encore plus souvant, c'e la théorie des loteries génoises.

Une roue de fortune, faisant l'office d'urne, co tient 90 numéros dont on tire 5. On demande la pr habilité d'en deviner un, deux, trois, quatre, cinq c ces numéros,

*) Les coefficiens binomiens $\underset{k}{1}, \underset{k}{2}, \underset{k}{3}, \ldots, \underset{k}{N}$ sont chez HIN $^k\mathfrak{A}$, $^k\mathfrak{B}$, $^k\mathfrak{C}$, ..., $^k\mathfrak{M}$. Dans ma notation a cadres, j' des formes plus systématiques qu'ici.

90 numéros mis donnent		5 num. tirés donnent
$\frac{90}{1}$.	1^{naires} rangés	$\frac{5}{1}$
$\frac{90.89}{1.2}$.	2^{naires}	$\frac{5.4}{1.2}$
$\frac{90.89.88}{1.2.3}$.	3^{naires}	$\frac{5.4.3}{1.2.3}$
$\frac{90..87}{1.2.3.4}$.	4^{naires}	$\frac{5...2}{1.2.3.4}$
$\frac{90...86}{1.2.3.4.5}$.	5^{naires}	$\frac{5...1}{1...5}$

) HINDENBOURG écrit les 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires} etc. rangés, sans répétition, A`, B`, C`, etc. En général son système de notation porte sur les bases suivantes :

La romaine droite annonce des files rangées A, B, C,, N.
(Combinationes)

La romaine inclinée annonce des files permutées *A*, *B*, *C*,, *N*.
(Variationes)

La moitié dextre de l'accent circonflexe avertit qu'on ne répète pas de chiffre ou de lettre dans la file
A`, B`,, N` ; *A*`, *B*`,, *N*`.

La moitié gauche de l'accent circonflexe avertit qu'on répète des chiffres ou lettres dans la file
'A, 'B,, 'N ; '*A*, '*B*,, '*N*.

N et *N* d'alphabets écrits servent à distinguer les files à nombre quelconque de chiffres ou lettres, de N et *N* caractéristiques de files 13^{naires}. Comme ceux-ci ne se rencontrent presque jamais en pratique, j'aurais préféré N et *N* pour la classe quelconque ; les correspondantes écrites nuisant à l'unité du système, outre qu'elles sont rarement d'une belle exécution typographique. Mais l'auteur a eu d'autres raisons.

Quand le nombre des choses combinées ou permutées (combinatae vel variatae) est à somme donnée de leurs nombres ou indices, on met cette somme au haut de la gauche. ^{m}N et ^{m}N`, $^{m}$`N et ^{m}N. Pour faire connaître ces choses, il accompagne la lettre combinatoire d'un Index $\left[\begin{smallmatrix}1&2&3&\dots&n\\a&b&c&\dots&n\end{smallmatrix}\right]$ qui se pose ordinairement au dessous.

il en resulte les rapports		les loteries qui d le plus pay
1 : 18	par 1^{nairs} ou extrait	15
1 : 400$\frac{1}{2}$	par 2^{nairs} ou ambe	300
1 : 11784	par 3^{nairs} ou terne	6000
1 : 511038	par 4^{nairs} ou quaterne	60000
1 : 43949268	par 5^{nairs} ou quine	100000

Comparaison faite, on trouve une perte p de la mise

par extrait $\frac{1}{5}$
par ambe $\frac{1}{4}$ à peu prés
par terne $\frac{1}{2}$ — —
par quaterne $\frac{7}{8}$ — —
par quine $\frac{438}{439}$ — —

Il n'en faut pas davantage pour prouver l' quence de ceux qui veulent forcer la fortune jeu. Sans doute on peut aventurer une somm que quand la loterie a un but utile: mais il s jours sage de n'en pas contracter le goût.

Ne pas tolérer des loteries dans un pays n le moyen d'en prévenir les abus, parce que l cteurs étrangers n'en sont que plus actifs cla ment, pour gagner une provision de 10 à 15 p Le meilleur serait que le gouvernement tînt un en régie qui payat à un taux plus haut que les étrangères, en imprimant sur chaque billet le tage des chances et cet anathême combinatoire

„Il n'y a qu'un fou qui puisse vo enrichir aux jeux de hazard, e malhonnête homme qui puiss quer le bien-être de sa famille

§. 9. *Corollaire du §. 7.* Si parmi les n chiffres permutés, il s'en trouve r égaux, les 1. 2. 3. . r permutations de ceux-ci ne donnant qu'une seule forme, le nombre total des permutations s'abaisse à

$$\frac{1.2.3..n}{1.2.3..r} = (r+1)(r+2)(r+3)..n.$$

Et si s chiffres deviennent encore égaux entr'eux, mais non avec les précédens, il faudra de nouveau diviser le résultat obtenu par $1.2.3..s$. En général,

„Pour trouver de combien de manières on peut permuter n chiffres dont plusieurs grouppes d'égaux, „divisez $1.2.3..n$, par 2 pour chaque chiffre dou„ble; par 2. 3 pour chaque chiffre triple; par 2. 3. 4 pour chaque quadruple; et ainsi de suite."

Il est palpable que le résultat ne saurait être qu'un nombre entier.

Exemple. Dans un voyage quelqu'un a passé une fois à Londres, deux fois à Paris et trois fois à Rome: quelles sont les manières, dont il a pû faire cette tournée?

En désignant Londres par $\dot{8}$, Paris par $\dot{4}$ et Rome par $\dot{2}$, on a

$\dot{1}\,\dot{2}\,\dot{2}\,\dot{4}\,\dot{4}\,\dot{8}$ susceptible de $\frac{1.2.3.4.5.6}{2.3 \times 2} = 60$ permutaires à répétition.

. . . . .	. . . . .	. . . . .
+ 2 2 2 4 4 8	+ 2 4 4 8 2 2	+ 4 2 8 2 4 2
2 2 2 4 8 4	2 4 8 2 2 4	4 2 8 4 2 2
2 2 2 8 4 4	2 4 8 2 4 2	4 4 2 2 2 8
2 2 4 2 4 8	2 4 8 4 2 2	4 4 2 2 8 2
2 2 4 2 8 4	2 8 2 2 4 4	4 4 2 8 2 2
2 2 4 4 2 8	2 8 2 4 2 4	4 4 8 2 2 2
2 2 4 4 8 2	2 8 2 4 4 2	4 8 2 2 2 4
2 2 4 8 2 4	2 8 4 2 2 4	4 8 2 2 4 2
2 2 4 8 4 2	2 8 4 2 4 2	4 8 2 4 2 2
2 2 8 2 4 4	2 8 4 4 2 2	4 8 4 2 2 2
2 2 8 4 2 4	4 2 2 2 4 8	8 2 2 2 4 4
2 2 8 4 4 2	4 2 2 2 8 4	8 2 2 4 2 4
2 4 2 2 4 8	4 2 2 4 2 8	8 2 2 4 4 2
2 4 2 2 8 4	4 2 2 4 8 2	8 2 4 2 2 4
2 4 2 4 2 8	4 2 2 8 2 4	8 2 4 2 4 2
2 4 2 4 8 2	4 2 2 8 4 2	8 2 4 4 2 2
2 4 2 8 2 4	4 2 4 2 2 8	8 4 2 2 2 4
2 4 2 8 4 2	4 2 4 2 8 2	8 4 2 2 4 2
2 4 4 2 2 8	4 2 4 8 2 2	8 4 2 4 2 2
2 4 4 2 8 2	4 2 8 2 2 4	8 4 4 2 2 2

On voit par cette application combien peu vraisemblable est la détermination de faits historiques dont les dates et même la succession manquent.

Exemple 2^d^. Trouver le coefficient de permutation d'un produit de puissances,

$$\overset{-\dot{1}}{1} \cdot \overset{-\dot{2}}{2} \cdot \overset{-\dot{3}}{3} \cdot \overset{-\dot{4}}{4} \cdot \ldots \cdot \overset{-\dot{k}}{k} \cdot$$

La somme $\dot{1} + \dot{2} + \dot{3} + + \dot{k}$ étant celle des choses à permuter, le nombre des formes possibles est

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (\dot{1}+\dot{2}+\dot{3}++\dot{k})}{1.2..\dot{1} \times 1.2..\dot{2} \times 1.2..\dot{3} \times 1.2..\dot{4} \times \times 1.2..\dot{k}}$$

$$= \frac{(\dot{1}+1)(\dot{1}+2)\ldots(\dot{1}+\dot{2}++\dot{k})}{1.2..\dot{2} \times 1.2..\dot{3} \times \times 1.2..\dot{k}}$$

Cette formule est d'un grand usage dans l'Analyse Combinatoire.

§. 10. Nous voilà donc en état de trouver sur le
p le coefficient de permutation d'un n^{naire} donné,
ui manquait à la solution du §. 5. Dans la plupart
cas pratiques ce coefficient s'écrit de tête.

Exemples. *)

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & q & q & q & q \\
+4 & 1 & 1 & 1 & 6 \\
12 & 1 & 1 & 2 & 5 \\
12 & 1 & 1 & 3 & 4 \\
12 & 1 & 2 & 2 & 4 \\
12 & 1 & 2 & 3 & 3 \\
4 & 2 & 2 & 2 & 3
\end{array}
=
\left\{
\begin{array}{l}
4.\ 1^{q3}.\ 6^{q} + 12.\ 1^{q2}.\ 2^{q}.\ 5^{q} \\
+ 12.\ 1^{q2}.\ 3^{q}.\ 4^{q} + 12.\ 1^{q}.\ 2^{q2}.\ 4^{q} \\
+ 12.\ 1^{q}.\ 2^{q}.\ 3^{q2} + 4.\ 2^{q3}.\ 3^{q}
\end{array}
\right.
$$

**)

$$
\begin{aligned}
= {} & 6.\ 1^{q5}\ 8^{q} + 30.\ 1^{q4}\ 2^{q}\ 7^{q} + 30.\ 1^{q4}\ 3^{q}\ 6^{q} + 30.\ 1^{q4}\ 4^{q}\ 5^{q} \\
& + 60.\ 1^{q3}\ 2^{q2}\ 6^{q} + 120.\ 1^{q3}\ 2^{q}\ 3^{q}\ 5^{q} + 60.\ 1^{q3}\ 2^{q}\ 4^{q2} \\
& + 60.\ 1^{q3}\ 3^{q2}\ 4^{q} + 60.\ 1^{q2}\ 2^{q3}\ 5^{q} + 180.\ 1^{q2}\ 2^{q2}\ 3^{q}\ 4^{q} \\
& + 60.\ 1^{q2}\ 2^{q}\ 3^{q3} + 60.\ 1^{q}\ 2^{q3}\ 3^{q2} + 6.\ 2^{q5}\ 3^{q}.
\end{aligned}
$$

omme le lecteur est déjà familiarisé avec la nota-
, je peux m'épargner les répétitions et distinctions
uses; ce qui abrége considérablement l'énoncé.
:onque a de la routine écrit ces développemens de
:, aussi mécaniquement qu'une multiplication ou
division numérique.

) Chez HINDENBOURG cette fonction combinatoire se note
; la 4me lettre de l'alphabet indiquant des quaternaires,
9 au haut de la gauche, qu'ils sont à somme 9. La
scule droite apprend que les files sont rangées (comple-
ies rite ordinatae) et la minuscule allemande ho-
yme avertit que chaque file est accompagnée de son coef-
it de permutation. Il me semble impossible d'être plus
t et plus expressif en caractères alphabétiques.

**) Chez HINDENB. f^{3} F.

Cette méthode de considérer séparément les ...duits et leurs coefficiens numériques, pour les p... ensuite tout d'un coup, est incomparablement plus ...péditive qu'en les évaluant ensemble par des proc... successifs, d'autant plus sujets à caution qu'il en a ... d'avantage. Mais quoique cette evaluation directem... combinatoire soit plus sûre par la simplicité, il se... bon néanmoins de pouvoir la vérifier par le nombre ... formes de $\overset{r..1}{N}$, qui est celui de $\overset{q^r}{N}$, en sommant les ... efficiens de permutation. Passons à cette recherche.

§. 11. Nombres r^{naires} à somme n ... chiffres.

Il n'y a évidemment qu'une manière de former ... 1^{naires} a somme n; c'est le chiffre n lui-même.

2^{naires}. En mettant successivement les chiff... 1, 2, 3, jusques $n-1$ à gauche, la droite recevra ... chiffres $n-1$, $n-2$, jusques 1. Total $n-1$ binai...

3^{naires}. Le chiffre 1 étant à gauche, la somme ... stante $n-1$ produira à sa droite $n-2$ binaires, et ... tant ce nombre de ternaires avec lui.

2 à gauche, la somme $n-2$ produit avec lui $n-$ ternaires,

3 à gauche, la somme $n-3$ produit avec lui $n-$ ternaires,

et ainsi de suite jusqu'au chiffre $n-2$ avec lequel la somme 2 forme 1 ternaire.

En sommant de bas en haut, vient

$$1+2+3++n-2=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2} \text{ ternaires.}$$

4^{naires}. Le chiffre 1 à gauche, la somme $n-$ produit avec lui $\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}$ quat^{s}.

Le chiffre 2 à gauche, la somme $n-2$ produit ... lui $\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}$ quat^{s}.

et ainsi de suite jusques

$n-3$ avec lequel la somme 3 forme $\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}$ quaternaires.

J'en conclus de bas en haut $\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}+\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}$

$+\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}++\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}$ quaternaires.

On trouve de même $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}++\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot$

$\frac{n-4}{3}=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdot\frac{n-4}{4}$ quintinaires.

Le procédé demeurant uniforme, on a généralement

„ $\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-r+1}{r-1}$ $^{r\text{naires}}$ à somme n des chiffres."

J'eûsse pû déduire ce théorème des paragraphes 6 et 9; mais la présente démonstration directe est en même tems une règle infallible pour construire en colonne rangée les nombres $^{r\text{naires}}$ à somme n des chiffres.

Constatons à présent l'exactitude des coefficiens proposés dans les paragraphes 4, 5 et 10.

La somme des coefficiens de permutation de

^{3}7 est $\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15=3+6+3+3$

^{4}9 est $\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}=56=4+12+12+12+12+4$

*) Chez HINDENB. ^{n}217 est ce nombre, et ^nM l'ensemble même des files à somme n des numéros. On en verra la raison plus bas.

q^6
13 est $\frac{12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5} = \{6+30+30+30+60+120+$
$+60+60+180+30+60+$

Remarque. La quantité des 1^{naires}, 2^{naires}, jusques et compris les n^{naires}, tous à somme n chiffres, est

$$1+\frac{n-1}{1}+\frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2}++\frac{n-1}{1}+$$
$$=(1+1)^{n-1}=2^{n-1}$$

Comme les problèmes qui vont suivre contienn assez d'applications des deux théorèmes de ce para phe, je n'en donnerai pas ici. En illustrant trop parties, on court risque d'obscurcir l'ensemble.

§. 12. Nous savons évaluer $(1.X+2.X^2+3.X^3+$ et pour chaque valeur de X. Si l'on voulait le d velc pemeut de $(1+2+3++k)^r$, *) il suffirait de cha ger dans celui de $(1.X+\text{etc.})^r$ les q en points, et supprimer les X. Quelque facile que soit ce proc HINDENBOURG en a donné un autre non moins bea il exige quelques préliminaires que voici. Je pars c core du cas le plus général.

**) „On peut former n^r nombres r^{nai} avec n chiffres en les répétant."

2^{naires}. Le chiffre 1 peut recevoir successiveme 1, 2, jusques n à sa droite: donc n binaires. Mais même chose a lieu pour 2, 3, enfin pour chaque aut des n chiffres: moyennnant quoi le total des binai possibles est $n.n=n^2$.

*) $(a+b+c++u)^r$ chez H.

**) H. note $\overset{'M}{[1\,2\,3\,..\,n]}$ l'ensemble des files résultant

3^{naires}. Chacun des n chiffres peut recevoir par or- les n^2 binaires à droite: donc $n.n^2=n^3$ ternaires sibles.

4^{naires}. Chacun des n chiffres peut recevoir par or- les n^3 ternaires à droite: donc $n.n^3=n^4$ quater- es possibles.

Et ainsi de suite. Cette demonsration directe en- ue à disposer en colonne rangée les polynaires à ré- ition.

Exemple. Les Ternaires possibles avec 0136 t au nombre de $4^3=64$.

3 2 1		3 2 1		3 2 1		3 2 1
0 0 0	+	1 0 0	+	3 0 0	+	6 0 0
0 0 1		1 0 1		3 0 1		6 0 1
0 0 3		1 0 3		3 0 3		6 0 3
0 0 6		1 0 6		3 0 6		6 0 6
0 1 0		1 1 0		3 1 0		6 1 0
0 1 1		1 1 1		3 1 1		6 1 1
0 1 3		1 1 3		3 1 3		6 1 3
0 1 6		1 1 6		3 1 6		6 1 6
0 3 0		1 3 0		3 3 0		6 3 0
0 3 1		1 3 1		3 3 1		6 3 1
0 3 3		1 3 3		3 3 3		6 3 3
0 3 6		1 3 6		3 3 6		6 3 6
0 6 0		1 6 0		3 6 0		6 6 0
0 6 1		1 6 1		3 6 1		6 6 1
0 6 3		1 6 3		3 6 3		6 6 3
0 6 6		1 6 6		3 6 6		6 6 6

Le développement de

$$(0+1+3+6)^3\,(0+1+3+6)^2\,(0+1+3+6)^1$$

ne cette colonne, qui n'exige que la peine de tracer chiffres. Un produit de tant de n-nomes qu'on veut onsruit de même.

En formant la colonne *télégraphiquement*, peut, pour ainsi dire, opérer les yeux bandés. Soit, exemple, $X=1$, on aura

$\overset{r..2}{X}n =$ à un produit de r polynomes de n te
Pour en construire le développement:

„Ecrivez les termes 1, 2, 3 . . . n de haut e
n^{r-1} fois de suite. Ecrivez à gauche de ce rang
cal n^{r-2} fois les mêmes termes en repétant chacun n
ensuite n^{r-3} fois en repétant chaque terme n^2; (
nuez dans cette progression."

Si la colonne devient trop longue, rien n'em
de la rompre en sections.

Théorème sécondaire. *) „En répétan
chiffres produissent

$$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}..\frac{n+r-1}{r}$$

nombres r^{naires} rangés."

Démonstration, servant de règle pour la construc

2^{naires}. Le chiffre 1 admettant 1, 2, , n à d
donne n binaires.

Le chiffre 2 admettant 2, 3, , n à d
donne $n-1$ binaires.

Le chiffre 3 admettant 3, 4, , n à d
donne $n-2$ binaires.

. . . . . .

Le chiffre n admettant $n - - 1$ bin

Total $1+2+3++n = \frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}$ binaires.

3^{naires}. Le chiffre 1 admet. à droite les $\frac{n}{1}.\frac{n}{}$
binaires.

2 — — $\frac{n-1}{1}$.
binaires, sans 1.

*) $\overset{'M}{[1, 2, , n]}$ chez HINDENBOURG.

le chiffre 3 admet à droite les $\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}$ binaires, sans 1, 2

. . . . . .

n — — — $\frac{1}{1}.\frac{2}{2}$

— — 1, 2, , $n-1$.

)tal $\frac{1}{1}.\frac{2}{2}+\frac{2}{1}.\frac{3}{2}++\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}=$

$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.$

. le chiffre 1 admet à droite les $\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$ ternaires.

2 — — $\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}$

— ternaires, sans 1

. . . . . .

n — — $\frac{1}{1}.\frac{2}{2}.\frac{3}{3}$

— ternaires, sans 1, 2, , $n-1$

tal $\frac{1}{1}.\frac{2}{2}.\frac{3}{3}++\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$

$=\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+3}{3}.\frac{n+4}{4}$

ısi de suite; le procédé est uniforme.

Exemple. Développer $(\dot{0}+\dot{1}+\dot{3}+\dot{6})^4$. Il n'y a écrire les $\frac{4.5.6.7.}{1.2.3.4.}=35$ quaternaires avec re- on des chiffres 0, 1, 3, 6, et les accompagner du co- ent de permutation.

+ 0000	1	+ 0116	12	+ 1133	6
0001	4	0133	12	1136	12
0003	4	0136	24	1166	6
0006	4	0166	12	1333	4
0011	6	0333	4	1336	12
0013	12	0336	12	1366	12
0018	12	0366	12	1666	4
0033	6	0666	4	3333	1
0036	12	1111	1	3336	4
0066	6	1113	4	3366	6
0111	4	1116	4	3666	4
0113	12			6666	1

La somme des coefficiens numériques étant 256: ils sont sans faute.

Il n'est pas indigne d'attention que beaucou nombres formés des chiffres triangulaires 0 1 3 6 remarquables en mathématique, en physique et e stoire, tant politique que religieuse.

§. 13. Jusques ici nous n'avons exécuté les r combinatoires qu'arithmographiquement; à dire, à l'aide d'indices numériques ou plûtôt d méros attribués aux choses combinés. Avec de l flexion on s'apperçoit pourtant que cet expédient, ticulier à la notation que j'ai adopté, n'est nulle indispensable, et qu'on peut combiner et permuter, et sans répétition, en files rangées et non rangées, quement par l'échange et le déplacement des le comme on fait en construisant les dictionnaires. P procédé lexicographique, l'Analyse Combina s'élève; comme je l'ai dit dans l'introduction, au de science indépendante, dont l'analyse mathéma et toutes les autres sciences de raisonnement ne que des parties. La méthode lexicographique o rectement combinatoire (rein combinatorisc Verfahren) est entièrement due à HINDENBOURG

Exemples en lettres. *)

Permutation de 2 choses	Permut. à 3 de 4 choses diverses	Combin. à 5 de 7 choses diverses	Permut. de 3 choses avec répétition	Permut. à 2 de 5 choses avec répét.	Combin. à 4 de 3 choses avec repét.
cd	efg	rstuv	ccc	aa	kkkk
dc	efh	rstuw	ccd	ab	kkkl
bd	egf	rstux	cce	ac	kkkm
db	egh	rstvw	cdc	ad	kkll
bc	ehf	rstvx	cdd	ae	kklm
cb	ehg	rstwx	cde	ba	kkmm
cd	feg	rsuvw	cec	bb	klll
dc	feh	rsuvx	ced	bc	kllm
bd	fge	rsuwx	cee	bd	klmm
da	fgh	rsvwx	dcc	be	kmmm
ac	fhe	rtuvw	dcd	ca	llll
ca	fhg	rtuvx	dce	cb	llim
bd	gef	rtuwx	ddc	cc	llmm
db	geh	rtvwx	ddd	cd	lmmm
ad	gfe	ruvwx	dde	ce	mmmm
da	gfh	stuvw	dec	da	
ab	gke	stuvx	ded	db	
ba	ghf	stuwx	dee	dc	
bc	hef	stvwx	ecc	dd	
cb	heg	suvwx	ecd	de	
ac	hfe	tuvwx	ece	ea	
ca	hfg		edc	eb	
ab	hge		edd	ec	
ba	hgf		ede	ed	
			ecc	ee	
			eed		
			eee		

Perm. (abcd) ou $D'_{[abcd]'}$ $C'_{[efgh]'}$ $E'_{[rstuvw]'}$ ou $E'_{[r..w]'}$

$'C_{[cde]'}$ $'B_{[a..e]'}$ $'D_{[klm]}$

A quiconque veut faire des progrès rapides en lyse Combinatoire, je conseillerai de copier d'abo fois ces exemples, puis de les essayer en d'autr tres. On en acquiert plus de routine que par ce tures; car ce n'est qu'en faisant qu'on apprend à et que l'esprit occupé plus fortement, approfon idées présentées et en crée de nouvelles.

Pour montrer comment on peut soumettre à c cédé la combinaison à somme donnée, cherch coefficient de x^{13} dans le développement de

$(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + hx^8 +$

C'est $5\ a^4 i$ *)

$+ 20\ a^3 bh$

$+ 20\ a^3 cg$

$+ 20\ a^3 df$

$+ 10\ a^3 e^2$

$+ 30\ a^2 b^2 g$

$+ 60\ a^2 bcf$

$+ 60\ a^2 bde$

$+ 30\ a^2 c^2 e$

$+ 30\ a^2 cd^2$

$+ 20\ ab^3 f$

$+ 60\ b^2 ce$

$+ 30\ ab^2 d^2$

$+ 60\ abc^2 d$

$+ 5\ ac^4$

$+ 5\ b^4 e$

$+ 20\ b^3 cd$

$+ 10\ b^2 c^3$

La somme des coefficiens numériques étan $\frac{12.11.10.9}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 495$, le coefficient cherché est faute. Je l'ai construit tout réduit; d'abord la

*) $(ax + + ix^9)^5 \times 13$ ou $j^{13}J$ chez HINDENB.

e, puis les coefficiens numériques. Afin de faire omment cela est possible, considérons la colonne

11119	*aaaai* *)
11128	*aaabh*
11137	*aaacg*
11146	*aaadf*
11155	*aaaee*
11227	*aabbg*
11236	*aabcf*
11245	*aabde*
11335	*aacce*
11344	*aacdd*
12226	*abbbf*
12235	*abbce*
12244	*abbdd*
12334	*abccd*
13333	*acccc*
22225	*bbbbe*
22234	*bbbcd*
22233	*bbccc*

Puisque le terme, dont on demande le coeffi-, a x^{13} pour puissance, son premier produit sera ix^9, et partant le 5^{naire} lexicographique initial est *ii*. Pour en dériver les suivans sans autre peine e les écrire, j'abaisse alphabétiquement *i* et élève isin; vient *aaabh*.

a répétition de ce procédé me donne *aaacg*, *lf*, *aaaee*.

*) Ne pouvant aller plus loin, je prens le prémier où *b* est à la seconde place de droite à gauche; *aaabh*. Abaissant *h* et élevant l'*a* le plus proche,

$^{13}\mathcal{J}^{r}_{s}$; se lisant Involution lexicographique nme 13. On en verra l'explication plus bas.

j'ai *aabbg*. Opérant sur *bg* comme dans 1), j'obtiens *aabcf*, *aabde*.

Comme *c* suit *b* dans l'alphabet, je prens à présent le premier 5^naire, où *c* a la seconde place et *b* la troisième *aabcf*. Opérant sur celui-ci, ainsi que nous venons de faire, il en résulte *aacce*, *aacdd*.

3) Les trois dernières places n'étant plus susceptibles d'élévation lexicographique, je prens *aabbg*, premier 5^naire où *b* est à la troisième. Abaissant ici *g* et élevant *a*, j'ai *abbbf*; d'où, par les règles 1) et 2) *abbce*, *abbdd*, *abcce*, *abcdd*.

4) Maintenant, du premier 5^naire *abbbf*, où *f* a la quatrième place, je déduis par les règles énoncées *bbbbe*, *bbbcd*, *bbccc*.

A moins d'intervertir l'ordre alphabétique, il n'y a plus de variation possible. La dernière forme de §. 9. me donne à présent sans tracer un chiffre ailleurs les coefficiens numériques de permutation: leur somme prouve à la fois leur justesse et celle de toute la colonne.

Qu'on écrive les 5^naires au long ou simplifiés en puissances, la marche est la même.

Si l'explication de la méthode est prolixe, son apprentisage ne l'est aucunement. On se familiarise en une heure avec elle, en opérant d'abord par chiffres leibnitziens, puis par polynaires non reduits, et enfin dans la simplification potentielle.

Disons à l'honneur du procédé lexicographique de HINDENBOURG, qu'aucun autre n'atteint son élégante rapidité. On s'en convaincra le mieux en traitant le problème suivant par les meilleures méthodes connus.

Ecrire tout d'un coup le coefficient de x^{25} dans le développement de $(a+bx+cx^3+dx^6+ex^{10})^{10}$. *)

*) $(a++ex^{10})^{10}$ x25 chez HINDENB.

$$\frac{6.7.8.9.10}{2.\ 2}\ c^2\,c\,b^2\,a^5$$

$$\frac{6.7.8.9.10}{2.\ 2.\ 3}\ e^2\,b^5\,a^3$$

$$\frac{7.\ 8.\ 9.\ 10}{2}\ e\,d^2\,c\,a^6$$

$$\frac{5.6.7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 2.\ 3}\ e\,d^2\,b^3\,a^4$$

$$\frac{6.7.8.9.10}{2.\ 3}\ e\,d\,c^3\,a^5$$

$$\frac{4.5.6.7.\ 8.\ 9,\ 10}{2.\ 2.\ 3}\ e\,d\,c^2\,b^3\,a^3$$

$$\frac{7.\ 8.\ 9.\ 10}{1}\ e\,d\,c\,b^6\,a$$

$$\frac{6.7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 3.\ 4}\ e\,c^5\,a^4$$

$$\frac{5.6.7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 2.\ 3}\ e\,c^4\,b^3\,a^2$$

$$\frac{7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 3}\ e\,c^3\,b^6$$

$$\frac{6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 3.\ 4}\ d^4\,b\,a^5$$

$$\frac{5.6.7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 2.\ 3}\ d^3\,c^2\,b\,a^4$$

$$\frac{5.6.7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 2.\ 3}\ d^3\,c\,b^4\,a^2$$

$$\frac{8.\ 9.\ 10}{2.\ 3}\ d^3\,b^7$$

$$\frac{5.6.7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 2.\ 3}\ d^2\,c^4\,b\,a^3$$

$$\frac{5.6.7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 2.\ 3}\ d^2\,c^3\,b^4\,a$$

$$\frac{7.\ 8.\ 9.\ 10}{2}\ d\,c^6\,b\,a^2$$

$$\frac{6.7.\ 8.\ 9.\ 10}{2.\ 3.\ 4}\ d\,c^5\,b^4$$

$$\frac{9.\ 10}{1}\ c^8\,b\,a$$

ai rangé à rebours, pour montrer que cette ma-
n' est pas moins facile, Ici elle l'était même da-
ge, parce que dans la construction litérale j'ai
d pû négliger *a* pour l'ajouter a la fin comme

complément des dix facteurs. Voici comme je me suis pris pour les autres lettres.

Ayant trouvé que le plus haut polynaire sans a, $e^2 c b^2$, que e accompagne la même puissance de x que dcb, d la même que c^2 et b^6, et c la même que b^3; remplace c par b^3, vient $e^2 b^5$.

Comme b ne peut se remplacer, je substitue d à eb^5; ce qui me donne ed^2c, où, mettant b^3 pour c, je parviens à ed^2b^3.

Je change ici d en c^2 et b^3 en c pour avoir ed, où, mettant deux fois de suite b^3 pour c, j'ai edc et $edcb^6$.

Les produits ne peuvent avoir plus de dix facteurs on ne peut donc plus remplacer c, et en conséquence change d en c^2 et b^6 en c^2; vient ec^5.

Et ainsi de suite. J'en ai assez dit pour qui m'a suivi la plume à la main. On peut facilement généraliser toutes ces règles lexicographiques: je ne m'y arrête pas, parce qu'il est tems de reprendre le Polynome Combinatoire.

$$F(a+xfx) = Fa + A\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$= Fa + A'\frac{xfx}{1} + B'\frac{x^2 fx^2}{1.2.} + \text{etc.}$$

§. 14. Nos coefficiens leibnitziens, tout aussi généraux que les lettres, étant plus souples, et les simplifications différentielles du §. 1. nous devenant inutiles après les principes que nous venons d'établir, prenons

$${}_{o}^{Fq}X, \text{ équivalant par §. 2. à } F({}_{o}^{q}X) =$$

$$F({}_{o}^{q}+{}_{o}^{q}X) = F({}_{o}^{q}+{}_{o}^{q}1.X+{}_{o}^{q}2.X^2+{}_{o}^{q}3.X^3+\text{etc.}).$$

${}_{o}^{Fq}X$, développé combinatoirement en puissan

de X et $\overset{q}{X}$, donne, en distinguant par des traits les coefficiens des dernières

$$\overset{Fq}{0} + \overset{Fq}{1}.X + \overset{Fq}{2}.X^2 + + \overset{Fq}{{}_0N}.X^N + \text{etc.} \;*)$$

$$= \overset{Fq}{0}' + \overset{Fq\ q}{1}.\overset{q}{X} + \overset{Fq\ q}{2}'.\overset{q}{X^2} + + \overset{Fq\ q}{{}_0N}.\overset{q}{X^N} + \text{etc.}$$

Or par §. 2., $\overset{q}{X} = \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \overset{q}{3}.X^3 + + \overset{q}{N}.X^N + \text{etc.}$

$$\overset{q}{X^2} = \overset{q^2}{X} = \overset{q^2}{2}.X^2 + \overset{q^2}{3}.X^3 + + \overset{q^2}{N}.X^N + \text{etc.}$$

$$\overset{q}{X^3} = \overset{q^3}{X} = \overset{q^3}{3}.X^3 + \overset{q^3}{4}.X^4 + + \overset{q^3}{N}.X^N + \text{etc.}$$

et ainsi de suite.

Ces valeurs substituées, la double expression de $\overset{Fq}{{}_0X}$ devient

$$\left.\begin{array}{l} \overset{Fq}{0} + \overset{Fq}{1}.X + \overset{Fq}{2}.\left.\begin{array}{l} X^2 + \overset{Fq}{3}.\left.\begin{array}{l} X^3 + + \overset{Fq}{{}_0N}.X^N + \text{etc.} \\ \quad + \overset{Fq\ q}{2'}.\overset{q}{N} \\ \quad + \overset{Fq\ q^2}{3'}.\overset{q^2}{N} \\ \quad \vdots \\ \quad + \overset{Fq\ q^N}{{}_0N'}.\overset{q^N}{N} \end{array}\right. \\ \quad + \overset{Fq\ q^2}{2'}.\overset{q^2}{3} \\ \quad + \overset{Fq\ q^3}{3'}.\overset{q^3}{3} \end{array}\right. \\ \quad + \overset{Fq\ q}{2'}.\overset{q}{2} \end{array}\right.$$

L'identité des deux séries donne ce théorème remarquable, proprement dit le

POLYNOME COMBINATOIRE

$$*)\ \overset{Fq}{{}_0N} = \overset{Fq\ q}{1'}.N + \overset{Fq\ q^2}{2'}.N + \overset{Fq\ q^3}{3'}.N + + \overset{Fq\ q^N}{{}_0N'}.N;$$

N étant un nombre entier, nous savons par ce qui pré-

*) $\overset{Fq}{{}_0N}$ est chez HINDENB. $F(a + bx + cx^2 + \text{etc.})^n\ (n+1)$ parceque chez lui Fa est censé être le prémier coefficient du développement.

cède, évaluer ${}^{q^N}_{o}N$ de la manière la plus directe et la plus simple; et par conséquent le problème proposé dans l'introduction est complettement résolu.

Si j'ai été un peu long, c'est que j'ai supposé un lecteur qui n'eût pas même les premières notions de l'Analyse Combinatoire. En les exposant, j'ai mis à portée d'apprécier l'extrême facilité de la méthode et de la comparer avec la différentielle, qui était seule en possession des développemens avant HINDENBOURG. Outre qu'elle conduit plus rapidement et plus sûrement à la solution, elle a encore l'avantage précieux pour le commençant d'être immédiatement applicable à des questions importantes. Ces prérogatives de l'Analyse Combinatoire n'ôtent rien au mérite de la Différentielle, qui a opéré tant de prodiges depuis un siècle: ce n'est même qu'en réunissant intimement, qu'en amalgamant, pour ainsi dire, les deux analyses, qu'on donnera à la logique du mathématicien toute l'etendue et la simplicité, dont elle est susceptible. Mais j'oublie que je dois faire voir l'utilité de notre solution.

§. 15. *Application première.* ${}^{q^r}_{o}X = (a + {}^{q}_{o}X)^r$, en prenant ${}^{q}_{o}X = a$. Nous avons ici

$${}^{Fq}_{o}N = \frac{d^N \cdot a^r}{1.2..N\,da^N} = \frac{r}{1}\cdot\frac{r-1}{2}\cdot\frac{r-2}{3}\cdot\cdot\frac{r-N+1}{N}\,a^{r-N}$$

$$= {}_{r}N.a^{r-N} \text{ par la notation du §. 8. Donc}$$

$$*)\ {}^{q^r}_{o}N = {}_{r}1.a^{r-1}.{}^{q}_{o}N + {}_{r}2.a^{r-2}.{}^{q^2}_{o}N + {}_{r}3.a^{r-3}.{}^{q^3}_{o}N + + {}_{r}N.a^{r-N}.{}^{q^N}_{o}N.$$

*) Chez HINDENBOURG $p^r x(n+1) = {}^{r}\mathfrak{A}a^{r-1}.\mathfrak{a}^n A + {}^{r}\mathfrak{B}a^{r-2}.\mathfrak{b}^n B + + {}^{r}\mathfrak{N}a^{r-n}.\mathfrak{n}^n N$.

Pour ${}_{\circ}^{q-r}X$, on a, en changeant le signe de r,

$$\overset{-r}{N} = \underset{-r}{1}.a^{-r-1}.\overset{q}{N} + \underset{-r}{2}.a^{-r-2}.\overset{q^2}{N} + \ldots + \underset{-r}{N}.a^{-r-N}.\overset{q^N}{N}$$

$$-\underset{r}{1}.a^{-r-1}.\overset{q}{N} + \underset{r+1}{2}.a^{-r-2}.\overset{q^2}{N} - \ldots \pm \underset{r+N-1}{N}.\overset{q^N}{N}.$$

temple 1er. On demande le coefficient de X^8 dans

$$(1 + \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \text{etc.})^{-\frac{2}{3}}.$$

enant $a = 1, r = -\frac{2}{3}$ et $N = 8$, c'est[**]) ${}_{\circ}^{q-\frac{2}{3}}8 =$

$$1 + \tfrac{5}{9}\left|\begin{matrix}17\\26\\35\\44\end{matrix}\right|\begin{matrix}2\\2\\2\\1\end{matrix} - \tfrac{40}{81}\left|\begin{matrix}116\\125\\134\\224\\233\end{matrix}\right|\begin{matrix}3\\6\\6\\3\\3\end{matrix} + \tfrac{110}{243}\left|\begin{matrix}1115\\1124\\1133\\1223\\2222\end{matrix}\right|\begin{matrix}4\\12\\6\\12\\1\end{matrix} - \tfrac{308}{729}\left|\begin{matrix}11114\\11123\\11222\end{matrix}\right|\begin{matrix}5\\20\\10\end{matrix}$$

$$+ \tfrac{260}{625}\left|\begin{matrix}111113\\111122\end{matrix}\right|\begin{matrix}6\\15\end{matrix} - \tfrac{7480}{15625}.\overset{q}{1}^7 \cdot 2.7 + \tfrac{2110}{5000}.\overset{q}{1}^8.$$

s coefficiens de permutation sont à droite des
its respectifs. En sommant ceux-là on a

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 2^7,$$

e l'exige la remarque du §. 11. Ces coefficiens
produits qu'ils accompagnent sont donc vérifiés.
cité, célérité, exactitude — la méthode de HIN-
URG ne laisse rien à désirer.

construction indique assez que le coefficient bino
à gauche multiplie toute la colonne: ainsi p.e.

$$p^{-r}\,\varkappa(n+1) = -\,{}^{r}\mathfrak{N}a^{-r-1}.\,a^{n}\,\mathfrak{A}^{+r+2}\,\mathfrak{B}a^{-r-2}. \ldots \pm {}^{r+n-1}\,\mathfrak{N}a^{-r-n}.\,n^{n}\,N.$$

) $p^{-\frac{2}{3}}\,\varkappa^9$, chez HINDENB.

$$\frac{308}{729}\left|\begin{array}{l|l} 11114 & 5 \\ 11123 & 20 \\ 11222 & 10 \end{array}\right. = \frac{308}{729}(5.\overset{q}{1}{}^4\overset{q}{4} + 20.\overset{q}{2}{}^3\overset{q}{2}\overset{q}{3} + 10.\overset{q}{1}{}^2\overset{q}{2}$$

Exemple 2^d. Développer $({}_0\overset{q}{X})^{-1}$. Sans diminu la généralité de la question nous pouvons suppo $\overset{q}{0} = 1$, $\overset{q}{1}$ et tous les coefficiens suivans négati moyennant quoi

$$({}_0\overset{q}{X})^{-1} = {}_0\overset{q-1}{X} = 1 + .{}_0\overset{q-1}{1}.X + .{}_0\overset{q-1}{2}.X^2 + + .{}_0\overset{q-1}{N}.X^N + \text{et}$$

$$= \frac{1}{1 - \overset{q}{X}} = \frac{1}{1 - \overset{q}{1}.X - \overset{q}{2}.X^2 - - \overset{q}{N}.X^N - \text{et}}$$

On en tire en développant et comparant

$${}_0\overset{q-1}{N} = \overset{q}{N} + {}_0\overset{q-1}{1}.\overset{q}{N} - 1. + .{}_0\overset{q-1}{2}.\overset{q}{N} - 2. + + .{}_0\overset{q-1}{N}.\overset{q}{1},$$

série récurrente moins étendue que celle que nous avo résolue dans le Développement général §. 3 aussi son expression immédiate est plus simpleme par ${}_0\overset{Fq}{N}{}' = 1$,

$$*)\quad {}_0\overset{q-1}{N} = \overset{q}{N} + \overset{q^2}{N} + \overset{q^3}{N} + + \overset{q^N}{N}.$$

Le coefficient de X^9 est de la sorte

$$**)\quad {}_0\overset{q-1}{9} = \overset{q}{9} + \overset{q^2}{9} + \overset{q^3}{9} + + \overset{q^9}{9} =$$

$$\overset{q}{9} + \left|\begin{array}{l|l} 18 & 2 \\ 27 & 2 \\ 36 & 2 \\ 45 & 2 \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l|l} 1^2\ \ 7 & 3 \\ 1\ 2\ 6 & 6 \\ 1\ 3\ 5 & 6 \\ 1\ 4^2 & 3 \\ 2^2 5 & 3 \\ 2\ \ \ 4 & 6 \\ 3^3 & 1 \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l|l} 1^3 6 & 4 \\ 1^2 2\ 5 & 12 \\ 1^2 3\ 4 & 12 \\ 1\ 2^2 4 & 12 \\ 1\ 2\ 3^2 & 12 \\ 2^3\ \ 3 & 4 \end{array}\right. + \left|\begin{array}{l|l} 1^4 5 & 5 \\ 1^3 2\ 4 & 20 \\ 1^3 3^2 & 10 \\ 1^2 2^2 3 & 30 \\ 1\ 2^4 & 5 \end{array}\right.$$

*) $p^{-1} \times (n+1)$ pour $p\,(1 + ax + bx^2 + \text{etc})$. Cette exp cation de p, posée à sa droite, s'appelle chez HIND. So ou échelle (Scala).

**) $p^{-1} \times 10$.

$$+\begin{vmatrix} 1^5 4 \\ 1^4 2^1 3 \\ 1^3 2^3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 \\ 30 \\ 20 \end{matrix} + \begin{vmatrix} 1^6 3 \\ 1^5 2^2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 7 \\ 21 \end{matrix} + 1^{7\,q}\cdot 8 + 1^{9\,q}.$$

J'ai englobé ici les facteurs égaux en puissances, comme les chiffres leibnitziens enfermés en parenthèses sont assez distingués par là des coefficiens numériques de permutation, j'ai pû sousentendre la marque q.

La somme des coefficiens numériques

$$1+8+28+56+70+56+28+8+1=2^8$$

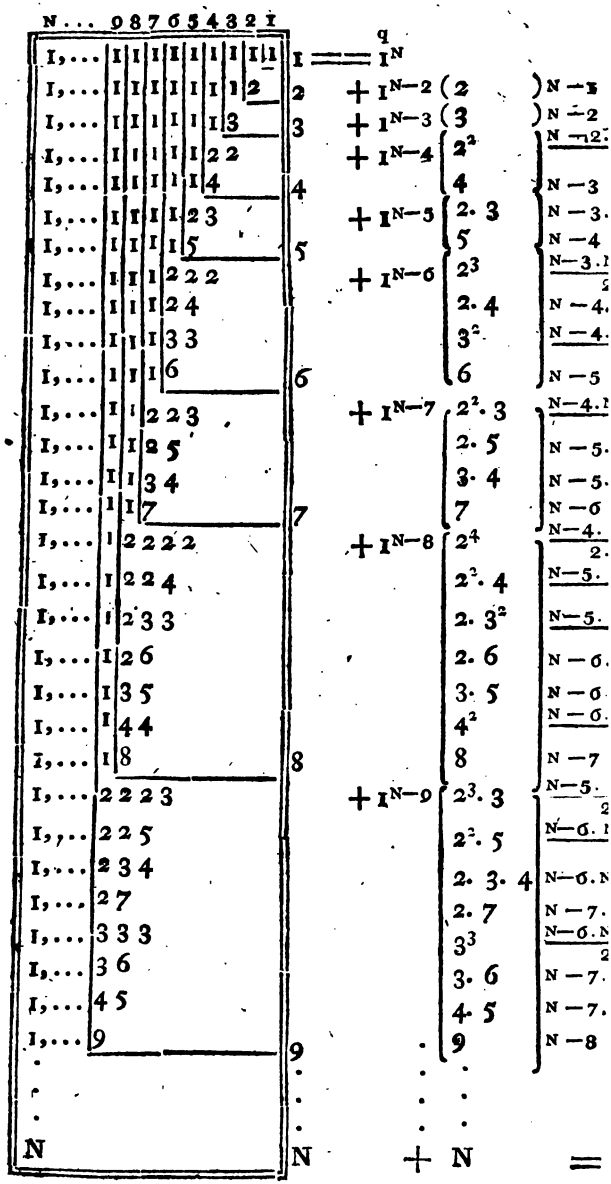
prouve encore la justesse.

Pour exprimer N^{q-1} tout réduit, il faut avoir recours

*) INVOLUTION LEXICOGRAPHIQUE

Hindenbourg donne ce nom expressif à l'ensemble des polynaires possibles à somme N, disposés, quand ils sont en lettres, comme les mots d'un dictionnaire. En chiffres leibnitziens, il en résulte de deux manières une suite de nombres ascendans: 1° en sousentendant une virgule décimale après le premier chiffre à la gauche; 2° en rendant la colonne rectangulaire au moyen de zeros fictifs ajoutés à droite.

*) L'involution arithmographique d'une somme n se note chez Hindenb. ${}^{n}\mathrm{J}$, et la lexicographique ${}^{n}{}_{n}\mathrm{J}^{r}$. Quand l'involution a ses coefficiens de permutation, on la designe par ${}^{n}\mathrm{j}$ et ${}^{n}{}_{n}\mathrm{j}^{r}$.


N ... 9 8 7 6 5 4 3 2 1
q
I,... 1 1 1 1 1 1 1 1 1 | 1 = I^N
I,... 1 1 1 1 1 1 1 2 | 2 + I^{N-2} (2) N-1
I,... 1 1 1 1 1 1 3 | 3 + I^{N-3} (3) N-2
I,... 1 1 1 1 1 2 2 | + I^{N-4} 2^2 N-2.
I,... 1 1 1 1 1 4 | 4 N-3
I,... 1 1 1 1 2 3 | + I^{N-5} 2.3 N-3.
I,... 1 1 1 1 5 | 5 N-4
I,... 1 1 1 2 2 2 | + I^{N-6} 2^3 N-3.1/2
I,... 1 1 1 2 4 | 2.4 N-4.
I,... 1 1 1 3 3 | 3^2 N-4.
I,... 1 1 1 6 | 6 N-5
I,... 1 1 2 2 3 | + I^{N-7} 2^2.3 N-4.1/2
I,... 1 1 2 5 | 2.5 N-5.
I,... 1 1 3 4 | 3.4 N-5.
I,... 1 1 7 | 7 N-6
I,... 1 2 2 2 2 | + I^{N-8} 2^4 N-4/2.
I,... 1 2 2 4 | 2^2.4 N-5.
I,... 1 2 3 3 | 2.3^2 N-5.
I,... 1 2 6 | 2.6 N-6.
I,... 1 3 5 | 3.5 N-6
I,... 1 4 4 | 4^2 N-6.
I,... 1 8 | 8 N-7
I,... 2 2 2 3 | + I^{N-9} 2^3.3 N-5.2/2
I,... 2 2 5 | 2^2.5 N-6.1/2
I,... 2 3 4 | 2.3.4 N-6.N/2
I,... 2 7 | 2.7 N-7.
I,... 3 3 3 | 3^3 N-6.N/2
I,... 3 6 | 3.6 N-7.
I,... 4 5 | 4.5 N-7.
I,... 9 | 9 N-8
N N + N =

chiffres en parenthèse sont des coefficiens leib-
s aussi bien que les 1 sans marque: les coeffi-
umériques occupent la droite.

te expression de ${}_{0}^{q-1}N$ se termine avec ${}_{1}^{q}0$: A qui
coup d'usage le tableau involutoire n'est pas né-
e pour la construire. On écrit les co-facteurs de
${}_{1}^{q}N-3$, ${}_{1}^{q}N-4$, etc., d'après la condition que la
des chiffres leibnitziens soit respectivement
etc.: on joint ensuite les coefficiens de permu-
par la règle du §. 9: et on vérifie enfin l'opéra-
r leur somme qui doit être 2^{N-1} selon le §. 11.

ce que je viens de dire on voudra bien ne pas
que je regarde le tableau involutoire comme su-
il est utile même aux combinateurs les plus exer-
t son étude fournit des vues pour l'Arithméti-
igurée, qu'on a trop peu traitée jusq'à ce jour.
ropriété précieuse du tableau, la quelle saute d'a-
ux yeux, c'est de

ériver d'une involution donnée l'immédiatement voisine.

exemple, pour dériver l'involution de 10 de l'in-
on de 9, exprimée sur le tableau, préposez à cette
re 1 et ajoutez au bas,

2	2	2
2	4	
3	3	
6		

Mais cet appendice est une involution de 10, où le moindre chiffre est 2; involution qu'on peut deduire de l'involution 8 du tableau en préposant 2 et ajoutant

5		
4		
	3	3 4
	3	7
4		
	4	6
	5	5
	10	

autre involution de 10, où le moindre chiffre est 3. On trouve ainsi que chaque involution se décompose en d'autres jusqu'à exhaustion. Nous en obtenons une recurrence remarquable à laquelle on me permettra de ne pas m'arrêter,

pour traiter tout de suite l'involution litérale sans c sidération numérique.

INVOLUTION LITERALE DIRECTE

Le coefficient général du développement de $(1-ax-bx^2-cx^3-\text{etc.})^{-n}$ est, en supprimant coefficiens numériques, faciles à trouver par §. 9,

$$
\begin{aligned}
{}^{*)}\quad & a^n + a^{n-2}b + a^{n-3}c \\
& + a^{n-4}(b^2+d) \\
& + a^{n-5}(bc+e) \\
& + a^{n-6}(b^3+bd+c^2+f) \\
& + a^{n-7}(b^2c+be+cd+g) \\
& + a^{n-8}(b^4+b^2d+bc^2+bf+ce+d^2+h) \\
& + a^{-9}(b^3c+b^2e+bcd+bg+c^3+cf+de+i) \\
& + a^{-10}(b^5+b^3d+b^2c^2+b^2f+bce+bd^2+bh \\
& \qquad + c^2d+cg+df+e^2+e
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite. La série te termine à a^{n-n}.

Abrégeons cette expression par cette forme qui explique elle même:

$$
\begin{aligned}
& a^n + a^{n-2}[2] + a^{n-3}[3] + a^{n-4}[4] + \ldots \\
& \quad + a^{n-r+2}[r-2] + a^{n-r+1}[r-1] + a^{n-r}[r] + e
\end{aligned}
$$

On a ici

$$[r] = b[r-1] + c[r-2] + d[r-3] + + \bar{r};\quad \bar{r}\ \text{d}$$

signant la plus haute lettre de $[r]$, laquelle s'ajo finalement.

Pour le cas présent, où les produits doivent être r gés, aucune lettre ne multiplie une plus basse. Ain

$$
\begin{aligned}
[10] = b(b^4+b^2d+bc^2+bf+ce+d^2+h) + c(cd \\
+ d.f + e.e + k.
\end{aligned}
$$

$$
{}^{*)}\ {}^{n}\mathfrak{J}^{e} = a^n + a^{n-2}\ {}^{(2}\mathfrak{J}^{e} + a^{n-3}\ {}^{(3}\mathfrak{J}^{e} + a^{n-4}\ {}^{(4}
$$

(a b c...) (b c d.....) + etc. chez Hr

Je répète encore ici et très expressément l' avertissement du Développement général, de ne pas confondre avec une récurrence ordinaire cette construction immédiate d' un terme général au moyen de ses parties.

Aucune méthode n' atteint cette superbe solution de HINDENBOURG, de laquelle on peut dire dans toute la rigueur de l' expression, qu' elle ne demande que la peine et le tems d'écrire. Par elle l' Analyse Combinatoire a reçu le dernier coup de main; car

chaque coefficient général du développement d' une fonction de série peut se construire involutoirement, moyennant des modifications aux coefficiens de permutation.

On en verra des exemples.

En multipliant aussi les lettres alphabétiquement plus basses, on obtient une INVOLUTION PERMUTÉE

(*Voyez le Tableau Combinatoire suivant*, p. 98.)

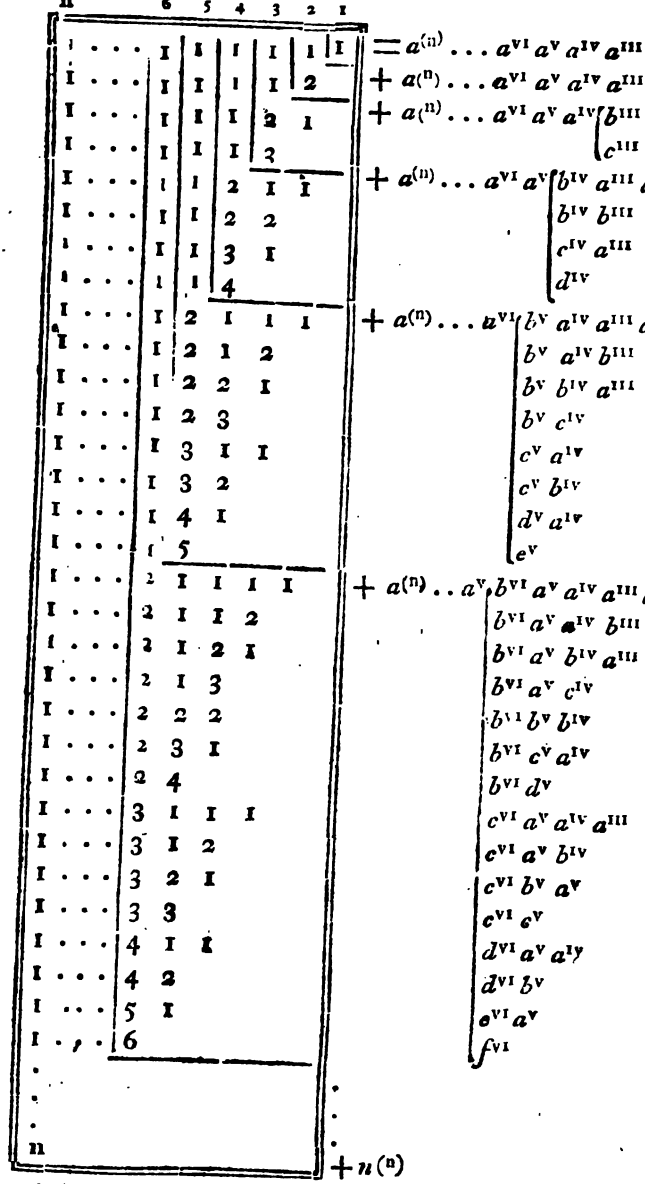
Cette involution permutée est le coefficient de x^n dans le développement de

$$a'x + b'x^2 + c'x^3 + d'x^4 + \text{etc.}$$
$$+ (a'x + \text{etc.})\ (a''x + b''x^2 + \text{etc.})$$
$$+ (a'x + \text{etc.})\ (a'x + \text{etc.})\ (a'''x + b'''x^2 + \text{etc.})$$
$$+ \text{etc. etc.}$$

On y rapporte une foule de cas.

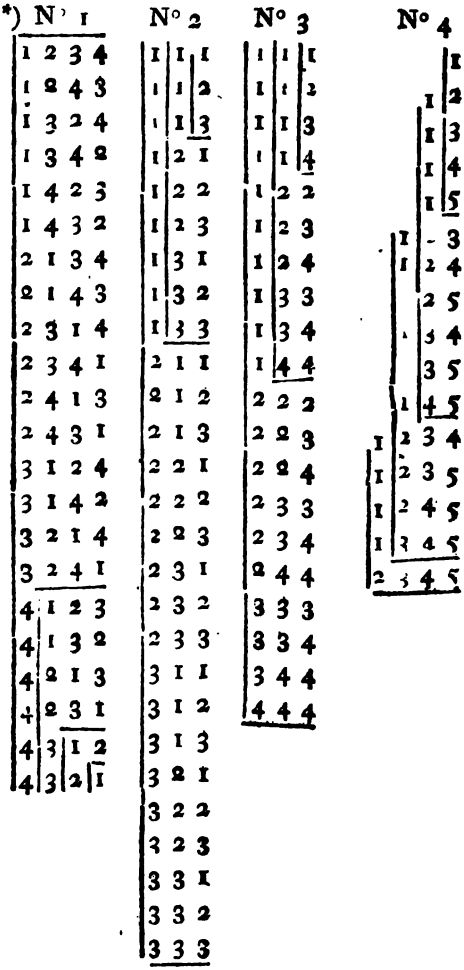
Non seulement la somme de différentes classes de polynaires, mais encore chaque classe en particulier se traite avantageusement par involution. La matière est si riche que je dois me borner: mais quiconque approfondira les exemples que je donne, ne peut manquer de sentir, que le Tableau involutoire est un des algorithmes les plus féconds, et l' instrument analytique le plus ingénieux qu' on connaisse. Nous le devons à

(*La Continuation du Texte*, p. 99.)



*) L'involution lexicographiquepermutée d'une somme n s'écrit chez HIND. $\sum^{n}$, forme aussi expressive que simple.

*) DENBOURG qui l'inventa il y a sept ou huit ans qui n'a cessé de le perfectionner depuis.



J'ai déja exposé les caractéristiques de HINDENBOURG pour ces fonctions combinatoires. Dans mes formes tron-

No. 1 représente de bas en haut les permutations respectives de 1, 2, 3, 4 choses diverses; elle est continuable à volonté.

No. 2. indique les 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, etc. qu' on peut faire avec les choses 1, 2 et 3 en les répétant.

No. 3. est l'involution des 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, etc. rangés possibles avec les choses 1, 2, 3, et 4 répétées

N. 4 renferme tous les 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, 4^{naires}, 5^{naires}, rangés des choses 1, 2, 3, 4, et 5, non répétées.

J' invite les amateurs à essayer aussi ces exemples immédiatement en lettres: un peu d' attention et beaucoup d' exercice feront trouver les règles dont l' enoncé serait trop long ici. C' est une belle propriété de l' Analyse Combinatoire de s'énseigner elle-même, dès qu' on en a les tableaux sous les yeux.

Il peut paraître surprenant, que ces tableaux, si utiles et d' une construction si simple, ayent échappé aux grands analystes qui ont travaillé sur les combinaisons avant HINDENBOURG. Mais en fait de système didactique, la facilité de l' invention est d un tout autre genre que celle de l' exécution: vérité qui doit nous remplir d' admiration et de gratitude pour les fondateurs de nos sciences. La simplicité est toujours éminemment difficile à trouver, parcequ' elle est trop près de nous; qu' elle est, s'il m'est permi de parler ainsi, en deça du foyer de notre esprit presbyte, naturellement porté à chercher au

quées d' aujourdhui, je n' en donne pas de particulières; mais dans ma notation à cadre, j' exprime tout avec $\left|\overline{}\right.$ modifié par des lignes et des points. Les indices s'écrivent dans ce cadre

oin. *) En ne regardant qu' à la difficulté vaincue, es cinq règles de l' Arithmétique ont ainsi plus de nérite peut être que la découverte du calcul différentiel, repárée par d autres découvertes: il en est de même le la Géométrie de Pythagore et de la Méchanique d' Archimède. Aujourdhui qu' une étude de quelques mois onduit beaucoup plus loin, on ne se doute pas de a peine infinie qu' a couté cette facilité. Les mathématiques modernes sont, comme la grotte de Pausylippe, une hausseé plane, depuis que la patience des siècles a ercé la montagne. Que n' en peut-on dire autant de outes les autres sciences, surtout de celles qu' intéressent de plus près le bonheur du genre humain!

§. 16. *Application seconde.* $\overset{1.q}{oX} = L\,(1 - \overset{q}{X})$, **) en prenant $\overset{q}{o} = 1$ et les autres coefficiens négatifs. Pour L, caracteristique des logarithmes naturels, on a ici

$\overset{1.q}{oN'} = -\frac{1}{N}$ et par la

$$\overset{1.q}{oN} = -\overset{q}{N} - \tfrac{1}{2}.\overset{q^2}{N} - \tfrac{1}{3}.\overset{q^3}{N} - - \frac{1}{N}\overset{q^N}{N}$$

$$= -\frac{1}{N}\left(\frac{N}{1}.\overset{q}{N} + \frac{N}{2}.\overset{q^2}{N} + \frac{N}{3}.\overset{q^3}{N} + + \frac{N}{N}.\overset{q^N}{N}\right.$$

En construisant l'involution, il faut donc diviser le coefficient de permutation des 1^{naires} par 1, celui des 2^{naires} par 2, celui des 3^{naires} par 3; et ainsi de suite. La

*) Ita fit plerumque; quae sunt ante oculos non videmus, facilia negligimus, venamur difficilia. HINDENB. *syst. comb. perm. prim. lin.* p. XVII.

**) log. nat. p pour $p\,(1 - \varkappa\,1.x - \varkappa\,2.x^2 - \text{etc.})$

somme de ces coefficiens de permutation modifiés pa
les multiplicateurs est

$$\frac{1}{N}\left(\frac{N}{1}+\frac{N}{2}\cdot\frac{N-1}{1}+\frac{N}{3}\cdot\frac{N-1}{1}\cdot\frac{N-2}{2}++\right)=\frac{2^N-1}{N}$$

ce qui fournit encore une vérification commode.

Exemple Écrire sans calcul le coefficient de x^{10} dans l
développement de $L(1-ax-bx^2-cx^3-\text{etc.})$. I
est, en posant d'abord les lettres, puis les coefficien
modifiés,

$$\begin{aligned}
***)\ {}_0\overset{L_q}{10} = & -\tfrac{1}{10}a^{10}-a^8b-a^7c-a^6(3\tfrac{1}{2}b^2+d)-a^5(6bc+\\
& -a^4(5b^3+5bd+2\tfrac{1}{2}c^2+f)-a^3(10b^2\\
& \qquad +4be+4cd+g)\\
& -a^2(2\tfrac{1}{2}b^4+6b^2d+6bc^2+3bf+3\\
& \qquad +1\tfrac{1}{2}d^2+h)\\
& -a(4b^3c+3b^2e+6bcd+2bg+c^3+2\\
& \qquad +2de+i)\\
& -\tfrac{1}{5}b^5-b^3d-1\tfrac{1}{2}b^2c^2-b^2f-2bce-b\\
& \qquad -bh-c^2d-cg-df-\tfrac{1}{2}e^2.
\end{aligned}$$

La somme des coefficiens numériques étant $\frac{2^{10}-1}{10}=103\frac{1}{2}$
l' opération est vérifiée.

La construction involutoire de ${}_0\overset{L_q}{N}$ offre encore de
expédiens particuliers, qu'on peut voir dans l'

Usus Logarithmorum Infinitinomii i
theoria aequationum; Lipsiae 1796, opuscu
de 46 pages, où l' auteur De Prasse a réuni à un ha
dégré la clarté et la précision. Quoique le conte
n' en soit pas élementaire, il explique si bien la not
tion de HINDENBOURG, qu'il peut être lû sans l' ai

*) $(\log p) = 10$.

'aucun autre livre. La méthode combinatoire directe, ıdépendante d' indices numériques, n' était pas encore ıbliée alors: elle suivit de près cet ouvrage.

*) $\overset{L^{-1}q}{X} = 2,71828183^{\overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \text{etc.}}$ a pour oefficient général

**) $\overset{L^{-1}q}{N} = \overset{q}{N} + \frac{1}{2}.\overset{q^2}{N} + \frac{1}{2.3}.\overset{q^3}{N} + + \frac{1}{2..N}.\overset{qN}{N}$, expres-ion d' un fréquent usage,

***) $\overset{\text{Sin}q}{{}_0X} = \text{Sin}\,(0,78539816 + \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \text{etc.})$ a coefficient général à très peu près de la même me:

$$\overset{\text{Sin}q}{{}_0N} = (\overset{q}{N} + \frac{1}{2}.\overset{q^2}{N} - \frac{1}{2.3}.\overset{q^3}{N} - + + - \pm \frac{1}{2..N}\overset{qN}{N})\sqrt{\frac{1}{2}}$$

A ces détails explicatifs j' ajouterai trois emplois choi-is qui suffiront pour mettre hors de tout doute l' avan-tage de l' Analyse combinatoire en Algèbre.

§. 17. SÉRIES RÉCURRENTES. Moivre et près lui les plus grands analystes, entr' autres LA-RANGE et LAPLACE, ont donné successivement à ette théorie toute l' élégance analytique dont elle est usceptible. Il n' y a que la resolution des équations ui arrête. En simplifiant encore la méthode des sub-itutions successives, (sinon la plus ingénieuse, au-oins la plus expéditive de celles que je connais) j' ai nployé plus d' une heure à décomposer l' équation inome,

*) h^p pour $p = ax + bx^2 + \text{etc.}$

**) $(h^p)\,\varkappa\,n$.

***) $\sin p$ pour $p = 0,785398 + ax + \text{etc.}$; $\sin p\,\varkappa\,n$, etc.

$x^{10} - 123x - 456789 = 0$, en ces dix facteur

$x - 3,681413$, $x + 3,680681$,

$x - 2,978143 \pm 2,164013\sqrt{-1}$,

$x - 1,137112 \pm 3,501100\sqrt{-1}$,

$x + 2,977918 \pm 2,163319\sqrt{-1}$,

$x + 1,137802 \pm 3,500671\sqrt{-1}$,

Le calcul des termes $(a + b\sqrt{-1})^n$ a aussi ses lon gueurs. Il s' ensuit qu' excepté le cas interpolatoire de fractionnaire ou très grand, le developpement immédia est ordinairement préférable aux formes englobées: aus EULER et LAGRANGE, s' en sont sérieusement occu pés Ce qui peut manquer à leurs travaux, doit êtr attribué au calcul différentiel, insuffisant pour déte miner réellement les loix compliquées.

L' an passé (1800) TREMBLEY, HINDENBOURG et ARBOGAST traitèrent enfin les séries recurrentes com binatoirement. C' est la méthode du second de ce géomètres que je présenterai, après avoir énoncé l question.

f, f et F désignant des fonctions différentes, équation identique

$$\frac{f0 + f1\ X + f2.X^2 + \text{etc.}}{1 - f1.X - f2.X^2 - \ldots - fr.X^r} = f0 + F1.X + F2.X^2 + \text{etc.}$$

devient, en multipliant de part et d' autre par le déno minateur, et comparant les coefficiens respectifs de X

$$Fn = f1.F(n-1) + f2.F(n-2) + \ldots + fr.F(n-r) + f$$

Ce terme général d' une série récurrente du r^{ier} ordre est le cas le plus étendu qu' on ait résolu jusq aujourdhui, à l' aide du calcul des r racines de $z^r = f1.z^{r-1} + f2.z^{r-2} + \ldots + fr$, d' une sommation a différences finies et d'une détermination des r constant qui devient fort longue quand r est un peu grand.

Solution combinatoire. En faisant ${}^{q}_{o}0 = 1$, $= -f1$, etc. j'ai $(1 - f1.X - \&c. - fr.X^r)^{-z} = {}^{q-1}_{o}X =$

$1 + .{}^{q-1}_{o}1.X + .{}^{q-1}_{o}2.X^2 + \&c. + .{}^{q-1}_{o}n.X^n + \&c.$, et partant

$(f0 + f1.X + \&c.)(1 + .{}^{q-1}_{o}1.X + .{}^{q-1}_{o}2.X^2 + \&c.)$
$= f0 + F1.X + F2.X^2 + \&c. + Fn.X^n + \&c.$

Le développement fait, l'identité des coefficiens X^n dans les deux membres procure

$= f0\ {}^{q-1}_{o}n + f1.{}^{q-1}_{o}n-1 + f2.{}^{q-1}_{o}n-2 + \&c. + fn.$

Or en général ${}^{q-1}_{o}N$ est l'involution lexicographique citée du §. 15. Il suffit donc d'y changer, dans les coefficiens de permutation, N successivement en n, $n-1$, $n-2$, jusques 1, en supprimant les produits multipliés par $r + {}^{q}1$, $r + {}^{q}2$, etc. qui sont nuls, puisque $f(r+1)$, etc. le sont par supposition. On multiplie ensuite respectivement par $f0$, $f1$, jusques fn.

Cette solution, pour la rapidité de la marche et la simplicité du résultat, me semble ne pouvoir être surpassée.

Exemple, $100 + 33,83333x + 11,44444x^2 - 3,85648x^3 - 18,70618x^4 - 13,00067x^5 + 6,62225x^6 - 2,97870x^7 + 2,74934x^8 + 3,51658x^9 + 2,49666x^{10} - 1,42795x^{11} - 0,07389x^{12} + 0,72815x^{13} - 0,74225x^{14} - 0,53341x^{15} - 0,16302x^{16} + 0,09129x^{17} + 0,12738x^{18} + \&c.$

La recurrence étant donnée par

$$Fn = \tfrac{1}{3}F(n-1) - \tfrac{1}{5}F(n-4) + \frac{1}{1.2.3.n},$$ ce

coefficient général est

$$= 100.\,{}_0^{q-1}n + \frac{1}{1}\,{}_0^{q-1}n - 1. + \frac{1}{1.2}\,{}_0^{q-1}n - 2. + + \frac{1}{1.2}$$

$$= 100\left(\frac{1}{3^n} - \frac{n-3}{3^{n-4}.5} + \frac{(n-6)(n-7)}{3^{n-8}.5^2} - \text{etc.}\right.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n-4}{3^{n-5}.5} + \frac{(n-7)(n-8)}{3^{n-9}.5^2} - \text{etc.}\right.$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{3^{n-2}} - \frac{n-5}{3^{n-6}.5} + \frac{(n-8)(n-9)}{3^{n-10}.5^2} - \text{etc.}\right.$$

$$+ \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{1}{3^{n-3}} - \frac{n-6}{3^{n-7}.5} + \frac{(n-9)(n-10)}{3^{n-11}.5^2} - \text{etc.}\right.$$

+ etc., etc Les termes qui contiennent des expos négatifs se négligent. Ainsi $n = 0$ donne 100; $n =$ donne 33,83333; $n = 2$ donne 11,44444, com cela doit être. Si l' expression de Fn est long celle de la série recurrente sommée à l' infini est courte.

$$\frac{100 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^4} = \frac{99x - 1 + 2{,}7182818^x}{x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4}$$

Des groupes plus compliqués par exemple,

$$\frac{(a + b\,x + c\,x^2 + \text{etc.})^m\,(a' + b'\,x + \text{etc.})^{n}}{(a'' + b''x + c''x^2 + \text{etc.})^r\,(a''' + b'''x + \text{etc.})^{s}}$$

se développent avec la même facilité.

§. 18. REVERSION FONCTIONNAIRE-COMB NATOIRE. Etant donné l' équation quelconque $fz =$ exprimer Fz en fonction connue d'une arbitraire x.

Ayant écrit $fz = fx - fx$, je prens de part et autre la fonction Ff^{-1}, et j' obtiens, en me souven

ne d' après le Développement général, $Ff^{-1}f$ quivant à F,

$$Fz = Ff^{-1}(fx - fx) =$$

$$Fx - \frac{dFx}{1.dfx}.fx + \frac{d^2Fx}{1.2dfx^2}.fx^2 - \frac{d^3Fx}{1.2.3dfx^3}.fx^3$$

etc. après avoir développé par le théoréme de Taylor; est absolument ce qu'on veut.

Exemple. De $z - \cos z = 0$, tirer immédiatement $^{-z} = 2,7182818^{-z}$ en fonction d' une approximation première ad - libitum.

En faisant pour abrèger $\sin x = s$, $\cos x = c$, la mule donne

$$^{-1} = h^{-x}(1 + (1+s)^{-1}(x-c) + \tfrac{1}{2}[(1+s)^{-2} + c(1+s)^{-3}]$$
$$(x-c)^2 + \tfrac{1}{6}[(1+s)^{-3} + (3c+s)(1+s)^{-4} + 3c^2$$
$$(1+s)^{-5}](x-c)^3 + \text{etc.}$$

On voit ici que malgré la simplicité de l' exemple proposé, la formule differentielle laisse bientòt perdre la loi. Voyons ce que peut l' Analyse Combinatoire, aidée de la differentielle.

Nous avons d' abord (Dév. gén. §. 6.) cette conversion

$$\frac{d^N Fx}{1.2..N\,dfx^N} = \frac{d^{N-1}\left[\frac{dFx}{dx}.\left(\frac{fx-fa}{x-a}\right)^{-N}\right]}{1.2.3.4..N\,dx^{N-1}},$$

la constante a devenant x après les differentiations.

En supposant $\frac{fx - fa}{x - a} = o\overset{q}{X}$, on a ensuite par le theorème $d^n(pq) = p\,d^n q + \text{etc.}$

$$\frac{d^N Fx}{1.2..N\,dx^N} = \frac{d^{N-1}\left[\frac{dFx}{dx}.\,{}^{q}oX^{-N}\right]}{1.2.3....N\,dx^{N-1}} =$$

$$\frac{d^N Fx}{dx^N}.\,{}^{q}oX^{-N}. + \frac{N-1}{1}.\frac{d^{N-1}Fx}{dx^{N-1}}.\frac{d({}^{q}oX^{-N})}{dx}$$

$$+\frac{N-1}{1}.\frac{N-2}{2}.\frac{d^{N-2}Fx}{dx^{N-2}}.\frac{d^2({}^{q}oX^{-N})}{dx^2}$$

$$+..+\frac{N-1}{1}.\frac{d^2Fx}{dx^2}.\frac{d^{N-2}({}^{q}oX^{-N})}{dx^{N-2}}.+\frac{dFx}{dx}$$

$\frac{d^{N-1}({}^{q}oX^{-N})}{dx^{N-1}}$, le tout divisé par 1.2.3....N. Voi déja la difficulté rappellée à la différentiation des fonctions simples $\frac{dFx}{dx}$ et $\left(\frac{fx-fa}{x-a}\right)^{-N}$. Mais comme puissance négative et la condition de changer finalment a en x, mettent encore la loi en danger et obligent au moins à des circuits, développons ${}^{q}oX$ combinatoirement.

$${}^{q}oX = {}^{q}o + {}^{q}1.X + {}^{q}2.X^2 + +.\,{}^{q}oM.\,X^M + \text{etc.} =$$

$$\frac{fx-fa}{x-a} = \frac{dfa}{da} + \frac{d^2fa}{2\,da^2}.(x-a) + \frac{d^3fa}{2.3.da^3}(x-a$$

$$+ \text{etc.},$$

X étant ici $= x - a$ et ${}^{q}oM = \frac{d^{M+1}fa}{2.3..(M+1)\,da^{M+1}}$

Or par §. 2. nous avons

${}^{q}oX^{-N} = {}^{q}oX^{-N} = {}^{q}o^{-N} + .\,{}^{q}1.X + +.\,{}^{q}oR.\,X^R + \text{etc.}$ et partar

$\frac{d^R(oX^{q\,-N})}{dx^R} = 1.2.3..R.oR^{q\,-N}$, en mettant après différentiation x pour a, ce qui annulle X.

Comme $o^q = \frac{dfa}{da} = \frac{dfx}{dx}$, nous aurons donc par le 15, $oR^{q\,-N} = \frac{N}{1}\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-1}.R - \frac{N}{1}.\frac{N+1}{2}$

$\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-2}.R^{q2} + \frac{N}{1}.\frac{N+1}{2}.\frac{N+2}{3}.\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-3}.$

$\pm\frac{N}{1}.\ldots\frac{N+R-1}{R}\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-NR}.R^{qR}.$

$o^{q\,-N}$ fait exception à cette formule; mais on sait par $(1+X)^{-N}$ que sa valeur est $o^{q\,-N} = \left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N}$.

faisant R succesivement 1, 2, jusques N — 1, et substituant les resultats

$$\frac{d(oX^{q\,-N})}{dx} = 1.oI^{q\,-N} = N\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-1}.I^q$$

$$\frac{d^2(oX^{q\,-N})}{dx^2} = 1.2.o2^{q\,-N} =$$

$$1.2\left[\frac{N}{1}\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-1}.2^q - \frac{N}{1}.\frac{N+1}{2}\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-2}.2^{q^2}\right]$$

ainsi de suite, dans la série de $\frac{d^N Fx}{1.N\,dfx^N}$, elle devient après la suppression des facteurs qui se commusent,

$$\frac{d^N Fx}{1.2..N\,df x^N} = \frac{d^N Fx}{1..N\,dx^N}\cdot\left(\frac{df x}{dx}\right)^{-N}$$

$$+\frac{d^{N-1}Fx}{1..N-2.dx^{N-1}}\cdot\left(\frac{df x}{dx}\right)^{-N-1}$$

$$+\frac{d^{N-2}Fx}{1..N-3.dx^{N-1}}\cdot$$

$$\left[\left(\frac{df x}{dx}\right)^{-N-1}\frac{q}{.2}+\frac{N+1}{}\cdot\left(\frac{df x}{dx}\right)^{-N-2}\frac{q^2}{.2}\right]$$

$$+\frac{d^{N-3}Fx}{1..N-4.dx^{N-2}}\cdot$$

$$\left[\left(\frac{df x}{dx}\right)^{-N-1}\frac{q}{.3}-\frac{N+1}{2}\cdot\left(\frac{df x}{dx}\right)^{-N-2}\frac{q^2}{.3}+\right.$$

$$\left.\frac{N+1.\ N+2}{2.\ 3.}\left(\frac{df x}{dx}\right)^{-N-3}\frac{q}{.1}\right.$$

+ etc, etc. On continuera cette série jusques inclusivement le premier terme dont le dénominateur devient zéro qui se supprime. La raison de cette suppression qui peut surprendre, est dans la suite

$$k^0+\frac{k^1}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ etc. où le terme}$$

itial n'a proprement dit point de diviseur.

Le coefficient général trouvé ne donne les valeurs que depuis $N=2$; mais pour $N=0$ etc. 1, on a les termes correspondans $Fx-\frac{dFx}{df x}\cdot fx$ tout réduits.

On peut aussi ordonner la série de la manière suivante

$$\frac{d^N Fx}{1..N\,df x^N} = \frac{d^N Fx}{1..N\,dx^N}\cdot\left(\frac{df x}{dx}\right)^{-N}$$

$$+\left(\frac{df\,x}{dx}\right)^{-N-1}$$

$$\left[\frac{d^{N-1}\,F\,x}{1..N-2.\,dx^{N-1}}\cdot 1^{q}+\frac{d^{N-2}.\,F\,x}{1..N-3.\,dx^{N-2}}\cdot 2+\text{etc.}\right]$$

$$-\frac{N+1}{2}\left(\frac{df\,x}{dx}\right)^{-N-2}$$

$$\left[\frac{d^{N-2}\,F\,x}{1..N-3.\,dx^{N-2}}\cdot 2^{q^2}+\frac{d^{N-3}\,F\,x}{1..N-4.\,dx^{N-3}}\cdot 3^{q^2}+\text{etc.}\right]$$

$$+\frac{N+1.\,N+2}{2\,.\,3}\left(\frac{df\,x}{dx}\right)^{-N-3}$$

$$\left[\frac{d^{N-3}\,F\,x}{1..N-4\,dx^{N-3}}\cdot 3^{q^3}+\frac{d^{N-4}\,F\,x}{1..N-5\,dx^{N-4}}\cdot 4^{q^3}+\text{etc.}\right]$$

$$\frac{N+1}{2}\cdot\frac{N+2}{3}\cdot\frac{N+3}{4}\cdot$$

$$\left[\frac{d^{N-4}\,F\,x}{1..N-5.\,dx^{N-4}}\cdot 4^{q}+\text{etc.}\right]+\text{etc.}$$

On ne perdra pas de vue que dans les colonnes combinatoires $1^{q}, 2^{q}, 3^{q}$, etc.; $2^{q^2}, 2^{q^3}$, etc.; 3^{q^3}, etc., etc, M^{q}

$$=\frac{d^{M+1}\,f\,x}{1..M+1.\,dx^{M+1}}$$

Cette solution est aussi courte que sa grande généralité le comporte et nous possédons sa loi de deux manières. Je n' ai donné tant d' étendue au problème que pour montrer ce que peut l' Analyse Combinatoire en fait de développemens compliqués. ESCHENBACH, OTHE et HINDENBOURG ont donné des Reversions sans arbitraire x, incomparablement plus traitables. Celle du dernier mérite par son élegance toute l' attention des géomètres.

Je ne disconviens pas d' ailleurs que les substitutions successives ne soient plus expéditives que les sé-

ries pour l' évaluation des racines numériques. EULE l' a déja remarqué. L' exemple proposé: De $z - o$ $z = o$, conclure h^{-z}, ne demande qu' un quart heure par la méthode des substitutions successive Dans la 3me partie de mon Esssai de Caractéri tique Combinatoire je donne à cette metho des règles qui laissent, j' espère, peu à désirer po l' usage.

§. 19. DÉVELOPPEMENT DES FONCTIO EN FACTEURS BINOMES. Je me propose à d sein des cas très difficiles.

Problème 1r Changer Fx en un produit de forme

$(1+X)^{\bar{1}}\,(1+X^2)^{\bar{2}}\,(1+X^3)^{\bar{3}}$ etc. etc.; $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, étant à déterminer. Je suppose pour simplifier qu nul, change Fx en 1. Comme le calcul immediat co pliquerait, passons d' abord aux logarithmes natur pour avoir, en représentant Fx par $o\dot{X} = \dot{1} + \dot{1}.$ $+ \dot{2}.X^2 +$ etc.

$$L(o\dot{X}) \text{ ou } o\overset{L.}{X} = \bar{1}.\,L(1+X) + \bar{2}.\,L(1+X$$
$$+ \bar{3}.\,L(1+X^3) + \text{etc.}$$

En développant ici le membre gauche combinatoireme et le droit analytiquement on obtient

$$\overset{L.}{.1}.X + .\overset{L.}{o2}.X^2 + .\overset{L.}{o3}.X^3 + \text{etc.} =$$

$$\bar{1}.X \left.\begin{matrix} - \frac{1}{2}.\bar{1} \\ + \quad \bar{2} \end{matrix}\right\} X^2 + \left.\begin{matrix} \frac{1}{3}.\bar{1} \\ - \quad \bar{3} \end{matrix}\right\} X^3 \left.\begin{matrix} - \frac{1}{4}.\bar{1} \\ - \frac{1}{2}.\bar{2} \\ + \quad \bar{4} \end{matrix}\right\} X^4 + \left.\begin{matrix} \frac{1}{5}.\bar{1} \\ + \quad \bar{5} \end{matrix}\right\} X^5 + \text{e}$$

ation identique, dont je tire

$$\overline{1} = {}_{0}^{L.}1 = 1,\quad \overline{2} = {}_{0}^{L.}2 + \tfrac{1}{2}\cdot\overline{1} = {}_{0}^{L.}2 + \tfrac{1}{2}\cdot 1,$$

$$\overline{3} = {}_{0}^{L.}3 - \tfrac{1}{3}\cdot 1,\quad \overline{4} = {}_{0}^{L.}4 + \tfrac{1}{2}\cdot\overline{2} + \tfrac{1}{4}\cdot 1 = {}_{0}^{L.}4 + \tfrac{1}{2}\cdot{}_{0}^{L.}2 + \tfrac{1}{4}\cdot 1,$$

$$\overline{5} = {}_{0}^{L.}5 - \tfrac{1}{5}\cdot 1,\quad \overline{6} = {}_{0}^{L.}6 + \tfrac{1}{2}\cdot\overline{3} - \tfrac{1}{3}\cdot\overline{2} + \tfrac{1}{6}\cdot 1,\quad \overline{7} = {}_{0}^{L.}7 - \tfrac{1}{7}\cdot 1,$$

insi de suite.

Le Développement général donne la mae combinatoire directe de parvenir à l' exposant général $\overline{N}$; mais voici un autre procédé, qui dans le cas ient conduit plus vite au but.

Pour construire $\overline{N} = {}_{0}^{L.}N \ldots\ldots \pm \frac{1}{N}\cdot 1$, je remarque que chacun des termes intermédiaires est ici $\frac{1}{R}\cdot\overline{S}$ pour $RS = N$; R et S étant des entiers > 1 et $< N$, le signe + ayant lieu pour R pair, et — pour R impair. Cette considération fournit des valeurs assez simples pour N nombre premier, qui n'a point de diviseurs, hors l'unité et lui-même. En ce cas

$$1)\qquad \overline{N} = {}_{0}^{L.}N - \frac{1}{N}\cdot 1.$$

Soit $N = RS$, produit de deux facteurs premiers: donc

$$\overline{N} = {}_{0}^{L.}N - \frac{1}{R}\cdot\overline{S} - \frac{1}{S}\cdot\overline{R} - \frac{1}{N}\cdot 1,$$

bien, en mettant les équivalens de S et R connus 1)

$$2)\ \overline{N} = {}_{0}^{L.}N - \frac{1}{R}\cdot{}_{0}^{L.}S - \frac{1}{S}\cdot{}_{0}^{L.}R + \frac{1}{N}\cdot 1.$$

N, produit de 3 facteurs premiers R, S, T, do
à l'aide de 1) et 2) cette formule

$$3)\ \overline{\mathrm{N}} = {}_{\circ}^{\mathrm{L.}}\mathrm{N} - \frac{1}{\mathrm{R}}\ {}_{\circ}^{\mathrm{L.}}\mathrm{ST} - \frac{1}{\mathrm{S}}\cdot {}_{\circ}^{\mathrm{L.}}\mathrm{RT} - \frac{1}{\mathrm{T}}\cdot {}_{\circ}^{\mathrm{L.}}\mathrm{RS}$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{RS}}\cdot {}_{\circ}^{\mathrm{L.}}\mathrm{T} + \frac{1}{\mathrm{RT}}\cdot {}_{\circ}^{\mathrm{L.}}\mathrm{S} + \frac{1}{\mathrm{ST}}\cdot {}_{\circ}^{\mathrm{L.}}\mathrm{T} - \frac{1}{\mathrm{N}}$$

Les formules pour N, produit de 4, 5, enfin de t
de facteurs premiers qu' on veut, se construisent s
autre peine que d'écrire. et voici comment.

„Décomposez le produit RSTU . . . = N
1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, etc. rangés, qui formeront les
nominateurs des fractions $\frac{1}{\mathrm{R}}, \frac{1}{\mathrm{S}}, \frac{1}{\mathrm{T}}$, etc.; $\frac{1}{\mathrm{RS}}$, $\frac{1}{\mathrm{R}}$
etc.; $\frac{1}{\mathrm{RST}}$, etc.; etc. Chacune de ces fractions s
compagnera d'un coefficient de LFx, dont le num
sera N multiplié par la fraction. Les 1^{naires}, 3^{nai}
5^{naires}, etc. ont le signe —; les 2^{naires}, 4^{naires},
ont le signe +.

Cette détermination d' un terme général comb
toire à l' aide des facteurs prémiers de son nume
est très singulière et peut enrichir la Science d
Nombres, partie, que LEGENDRE a le premier rédi
en corps de doctrine, avec un succès qui lui ass
la reconnaissance universelle.

Problème 2d. Convertir ${}_{\circ}\dot{\mathrm{X}}$, fonction quelconq
de X, en

$$(1 + \overline{1}.\mathrm{X})\ (1 + \overline{2}.\mathrm{X}^2)\ (1 + \overline{3}.\mathrm{X}^3)\ \text{etc.}$$

je suppose encore ${}_{\circ}\dot{\mathrm{X}} = 1 + 1.\mathrm{X} + 2.\mathrm{X}^2 + \text{etc.}$, fo
me toujours possible, en multipliant ou divisant la fon

a par une constante et développant par le théorême TAYLOR. Le calcul immédiat donne

$$\dot{X} = 1 + \dot{1}.X + \dot{2}.X^2 + \text{etc.} =$$
$$1 + \bar{1}.X + \bar{2}.X^2 + \left.\begin{matrix}\bar{3} \\ +\bar{1}\,\bar{2}\end{matrix}\right) X^3 + \left.\begin{matrix}\bar{4} \\ +\bar{1}\,\bar{3}\end{matrix}\right) X^4 + \left.\begin{matrix}\bar{5} \\ +\bar{1}\,\bar{4} \\ +\bar{2}\,\bar{3}\end{matrix}\right) X^5 + \text{etc.}$$

N est ici une involution à somme N, sans répétini permutation, soit effective, soit par coefficiens. la comparaison des termes homologues, on trouve

$$\bar{1} = 1,\quad \bar{2} = 2,\quad \bar{3} = 3 - 1\,2,\quad \bar{4} = 4 - 1\,3,$$
$$\bar{5} = 5 - 1\,4 - 2\,3,\quad \bar{6} = 6 - 1\,5 - 2\,4 - 1\,2\,3,$$
$$\bar{7} = 7 - 1\,6 - 2\,5 - 3\,4 - 1\,2\,4,$$
$$\bar{8} = 8 - 1\,7 - 2\,6 - 3\,5 - 1\,2\,5 - 1\,3\,4.\ \text{etc.}$$

La substitution successive, tâtonnement inventif, fait si souvent, à l'aide des chiffres Leibnitziens, élér les loix compliquées, nous donne

$$\bar{1} = 1,\quad \bar{2} = 2,\quad \bar{3} = 3 - 1\,2,\quad \bar{4} = 1\,3 - 1\,1\,2,$$
$$\bar{5} = 5 - 1\,4 + 1\,1\,3 - 1\,1\,1\,2.$$
$$- 2\,3 + 1\,2\,2$$
$$\bar{6} = 6 - 1\,5 + 1\,1\,4 - 1\,1\,1\,3 + 1\,1\,1\,1\,2,$$
$$- 2\,4 + 1\,2\,3 - 1\,1\,2\,2.$$

Jusques ici ces valeurs sont des décomposit rangées de N avec repetition et exclusion des te composés d' un produit du même chiffre, tel pa emple que $\dot{2}\,\dot{2}$, $\dot{4}\dot{4}\dot{4}$, etc. Mais cette loi, mani en apparence, change à

$$\begin{array}{l}
\bar{7} = 7 - 16 + 115 - 1114 + 11113 - 1111 \\
\quad - 25 + 2.124 - 3.1123 + 2.11122 \\
\quad - 34 + 133 - 1222 \\
\quad + 223
\end{array}$$

ce qui doit mettre en gardes contre les induct précipitées. Recourons aux logarithmes, qui c geront

$$\dot{X} = (1 + \bar{1}.X)\,(1 + \bar{2}.X^2)\,(1 + \bar{3}.X^3) \text{ etc. en}$$

$$\overset{L.}{\circ}1.X + \overset{L.}{\circ}2.X^2 + \overset{L.}{\circ}3.X^3 + \text{etc.} =$$

$$L(1 + \bar{1}.X) + L(1 + \bar{2}.X^2) + \text{etc.} =$$

$$\bar{1}.X - \tfrac{1}{2}.\bar{1}^2 + \bar{2}\Big)X^2 + \tfrac{1}{3}.\bar{1}^3 + \bar{3}\Big)X^3 - \tfrac{1}{4}.\bar{1}^4 - \tfrac{1}{2}.\bar{2}^2 + \bar{4}\Big)X^4 + \text{etc.}$$

Par la comparaison des termes homologues, on ve en transposant

$$\bar{N} = \overset{L.}{\circ}N \ldots \pm \frac{1}{N}.\dot{1}^N.$$ Ici les terme termédiaires se déterminent au moyen de la form

$$\frac{1}{R}(-\bar{S})^R$$ pour $N = RS$ aux mêmes condi

e dans le problème précédent. Si N est un nom-
e premier, on a ici

$$\overline{\overline{N}} = {}_{0}^{L.}N - \frac{1}{N} \cdot 1^{N}.$$

Au moyen de cette formule, on en construira pour
produit de 2, 3, enfin de tant de facteurs premiers
'on veut.

Ma transformation d' une fonction générale en un
oduit de binomes à puissances successives de la va-
able, est, je pense, entièrement neuve, et ne man-
era pas de trouver son emploi. Non seulement l'
nalyse différentielle est insuffisante ici, mais encore
que autre hors la combinatoire. On se rapellera
e j' ai mis dans tout son jour, que l' Analyse Combi-
atoire est le Calcul ordinal ou des rapports de
situation.

APPENDICE SUR LES RAPPORTS DE SITUATION.

En mettant un ordre dans une suite d'idées, il en
ulte nécessairement des ordres accessoires dont la
ntemplation fournit sans cesse des théorèmes
uveaux. Pour me borner aux objets les mieux
nnus: de la suite des unités naissent les nom-
es naturels et les figurés de toute espèce; les no-
enclatures et classifications méthodiques, la construc-
on des langues vulgaires et philosophiques dérivent de
rtains mots-racines qu' on combine et modifie plus
moins systématiquement. L' art de retenir et de
isonner, celui même d' inventer, n' ont point d' autre
se: l' homme de génie ne se distingue que par l' ima-
ination aidée du goût, c' est à dire, par la faculté de
rmer plus de combinaisons et d' en choisir les meil-

leures; delà les différences du génie. Pythagore e Homère avaient plus d' imagination qu' Archimède e Virgile; ceux-ci l' avaient plus sage. Il est difficil de prononcer sur la prééminence, mais encore plus e enseigner l' imagination et le goût, et surtout de déte miner comment l' homme extraordinaire les acquier Tel croit le génie un pur don de la nature, tel un r sultat d' un travail opiniâtre; ce qui est certain, c' e que si l' assiduité n' est pas toujours la mère du géni elle en est aumoins constamment la nourrice. Au reste il n' y a guère que les gens sans génie qui raison nent bien sur le génie; celui-ci préfere d' étonner l monde au soin minutieux de se scruter lui-même.

Personne ne doute d' ailleurs que de bonnes règles faciles à retenir et à combiner, ne conduisent plu sûrement à la science, qu' une récherche à l' aventure où l' esprit épuise ses forces en vain. La brièveté d l' enoncé, en soulageant la mémoire, aide extrêmemen le jugement; c' est l' avantage de l' algèbre et des ta bleaux combinatoires. A la rigueur on peut s' en passer; le discours vulgaire peut exprimer l' algèbre l plus savante: mais avec quelle diffusion!

Ces tableaux déduisent de la situation des signes ar bitraires, des rapports constans entre les idées qui ré pondent à ces signes: voilà ce que j' entens par RAP PORT DE SITUATION.

Nous n' avons considéré jusques ici que la situa tion linéaire et plane: cette dernière est celle qu résulte de l'ordonnance horisontale et verticale des sig nes; l'oblique, plus ou moins inclinée, n' en est qu' un conséquence. L' ordonnance solide, ou selo trois dimension, n' a encore été que peu considéré elle promet cependant des résultats encore plus int

ms par leur généralité, et je compte m' en occuper our.

.e modèle combinatoire le plus ancien, et sans redit le plus parfait, de l' ordonnance plane est l' olution Lexico-stélégraphique, consous le nom de Table de Pythagore.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	
02,	04	06	08	10	12	14	16	18	etc.
03,	06,	09	12	15	18	21	24	27	
04,	08,	12,	16	20	24	28	32	36	etc.
05,	10,	15,	20,	25	30	35	40	45	etc.
06,	12,	18,	24,	30,	36	42	48	54	
07,	14,	21,	28,	35,	42,	49	56	63	
08,	16,	24,	32,	40,	48,	56,	64	72	etc.
09,	18,	27,	36,	45,	54,	63,	72,	81	
etc.			etc.				etc,		

s suites horisontales et verticales ont les premières ences constantes, les secondes différences sont antes dans les suites obliques interminees; il en e même dans les obliques terminées, à cela près lles s'étendent symmetriquement des deux cotés.

e ce tableau continuable à l' infini, on tire par tion

01 ; 01, 02 ; 01, 02, 03 ; 01, 02, 03, 04 ; etc,
02, 04 02, 04, 06 02, 04, 06, 08
03, 06, 09 03, 06, 09, 12
04, 08, 12, 16

es évolutions, ou parties géneratrices de l'involu- sont des tables de multiplication pour les échelles mération de 1, 2, 3, 4, etc. chiffres significatifs.

Le tableau des nombres figurés est du même

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

Les diagonales terminées sont le dévelopr du binome $(1+1)^n$, tandis que les obliques minées présentent des suites d' une sommation facile, la forme du terme général étant exponer Par exemple

$$1+\frac{2}{1}+\frac{3.4}{1.2}+\frac{4.5.6}{1.2.3}+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2}{1.\ 2.\ \ 3\ \ldots}$$

+ etc.

Une involution stélégraphique d' un usag moins étendu que les précédentes et plus belle par sa simplicité, et ses conséquences singulières, suivante, sur laquelle HINDENBOURG á établi s vention des facteurs des nombres,*) au moyen mésurage qui donne les nombres premiers par sion: méthode, qui n' a pas encore été égalée et si prodigieusement rapide qu' une table continuée à 10 millions ne serait que le travail de quelqu

*) C. F. HINDENBURG's Beschreibung einer Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen Abzählen oder Abmessen bequem zu finden. Leipzig opuscule de 120 pages avec des annexes et une planche

On ne peut que regretter que le public n'ait pas
x secondé l' auteur.

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	etc.
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	etc.
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	etc.
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	etc.
etc.		etc.			etc.					

nfant et même une machine, (par exemple une
à dix dents, portant les chiffres 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, et
nes portant un seul de ces chiffres autant de fois
on veut) peuvent construire cette table qui n' exi-
ucun calcul. Pour y accompagner chaque nombre
ous ses facteurs, il suffit d' appliquer une règle
n patron et de copier des chiffres. Quand on veut
orner au plus petit et au plus grand facteurs, il
ut qu' autant de mésurages qu' il y a de nombres
iers entre 1 et $\sqrt{1000000} = 1000$. Je le repète;
'a pas apprécié, comme on le devait, cette ingé-
se simplicité.

Une autre involution stélégraphique rémarquabl sa simplicité, est la Dyadique:

	0 0 0 0 0 =	0
	0 0 0 0 1	1
	0 0 0 1 0	2
	0 0 0 1 1	3
	0 0 1 0 0	4
	0 0 1 0 1	5
	0 0 1 1 0	6
etc.	0 0 1 1 1	7
	0 1 0 0 0	8
	0 1 0 0 1	9
	0 1 0 1 0	10
	0 1 0 1 1	11
	0 1 1 0 0	12
	0 1 1 0 1	13
	0 1 1 1 0	14
	0 1 1 1 1	15
	1 0 0 0 0	16
	etc.	etc.

Ecrivez d' abord en ligne verticale 0 1 0 1 0 1 0 puis cette même suite en doublant chaque c 0 0 1 1 0 0 1 1 etc., puis en quadruplant, octuplant

Cette table est la numération de l' Arithmétiq naire, par laquelle LEIBNITZ expliqua si heureus la figure mystérieuse des huit Coua inventé Fohi et si fameuse à la Chine où elle fût de ten mémorial l' objet des recherches des lettrés.

La ligne brisée représentant o et la droite 1, figure est l' équivalent de

0 1 2 3 4 5 6 7.

est peut-être là l' origine du mystère attribué au e ⁻ dès la plus haute antiquité, s'il ne le doit pas ases de la lune, d'où nos semaines ont certaine- a quantité des jours. Au reste je suis porté com- Chinois à supposer plus qu'un système de nu- m dans les Coua. Les trois lignes ont du rap- ec les trois dimensions de l' espace; la ligne sim- la ligne brisée peuvent correspondre à d' autres

Quoiqu' il en soit, ce monument de la plus antiquité annonce un dessein manifestement com- re.

elques fois l'ordre stélégraphique n' est pas ap- Soit, par exemple, (*Développement Générale* : cofacteur de 01 dans F, qui est

| | | |

De bas en haut les groupes linéaires commencent a 16, 26, 36, 46, 56. Pour en faire des binaires verticaux on ajoute le nombre immediatement inferieur 15, 25, 35, 45; pour changer les binaires en quaternaires, on ajoute le nombre suivant deux fois; c'est à dire 14, 24, 24, 34, 34, pour changer les quaternaires en 8^naires, on ajoute autant que besoin les nombres respectifs 13 et 23. Et ainsi de suite.

Le lecteur n'a pû manquer d'appercevoir que l'Analyse Combinatoire, en menant toujours directement au but, multiplie encore les solutions; ce qui sert le moins à verifer les resultats. Mais il en résulte encore des ressources pour les cas difficiles, et une abondance précieuse d'idées, qui multiplie les vues et encourage l'esprit à chercher, en lui donnant le sentiment de ses forces. Si par fois il semble que le problème n'a qu'une seule solution, il ne faut pas se décourager: en tournant et retournant en divers sens, on en decouvre d'autres, qui conduisent ordinairement plus loin. La permutation de *n* chiffres à 1, à 2, à 3, etc. se refuse aux involution exposées; la voici dans une forme involutoire nouvelle, où les nombres semblent ne suivre aucun ordre. Pour être plus court, et par là plus clair je ne prendrai que les chiffres 1 2 3 4. La généralité n'est pas toujours dans le nombre indéterminé des choses

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3
1	3	4	2
2	4	1	3
3	1	2	4
4	2	3	1
1	4	2	3
2	1	3	4
3	2	4	1
4	3	1	2
1	2	4	3
2	3	1	4
3	4	2	1
4	1	3	2
1	3	2	4
2	4	3	1
3	1	4	2
4	2	1	3
1	4	3	2
2	1	4	3
3	2	1	4
4	3	2	1

Avec de l'attention on trouvera d'abord, que les quaternaires verticaux sont composés du cycle 1 2 3 4, commencé à un de ses quatre chiffres et terminé au voisin; 2341, 3412, 4123.

1
2
3
4

, la prémiere évolution, est la permutation de 1234 à un. J'en déduis la permutation à deux, en écrivant cette évolution $4 - 1 = 3$ fois de haut en bas, et ajoutant a droite les cycles 2341, 3412, 4123.

Pour obtenir la permutation à trois, j'écris l'évolution binaire $4 - 2 = 2$ fois de suite, et j'ajoute respectivement à droite l'un sous l'autre

341241234123341, 412323413412,

provenant de 2341, 3412, 4123 considéré comme un seul cycle.

On procède analoguement pour rendre la permutation quaternaire. Il est palpable, que la méthode a lieu pour tant de chiffres ou choses qu'on veut: elle a cela de particulier qu'elle ne demande que la peine de copier.

Nous venons de présenter différentes loix stélégraphi-
ou verticales: elles peuvent être constantes, varia-
, à périodes, à cycles, enfin dérivées d'une norme
lconque F *n*. Leurs applications sont nombreuses
s les sciences. Les périodes constantes se rencontrent
Chronologie, où les cycles solaire et lunaire, les

indictions romaines, les périodes, juliennes, grégorien et autres sont de cette espèce. Le synchronisme de l' stoire, ou l' art de vérifier les dates au moyen du para lisme des ères, produit des colonnes combinatoires les rangs respectifs ont cette loi simple; n, $n+$ $n+s$, etc. Dans une autre occasion je serai plus é du sur cette matiere.

Les rangs obliques sous toute sorte d' angles, même selon des direction courbes, ne sont pas mo utiles pour parvenir rapidement à certains résult Cette considération, en la poussant plus loin, condu de l' Analyse Combinatoire à la Géométrie Co binatoire et à la Méchanique Combinatoi toutes des parties encore en friche de la *Science d Combinaisons*.*)

Dans la seconde Sammlung Analytisc Combinatorischer Abhandlungen, le Profe seur ROTHE, jeune géomètre d'un talent décidé**) d'une haute esperance pour les mathématiques, a m méroté la loi des deplacemens. C' est une nouvelle ca rière pour l'Analyse Combinatoire, où les applicatio

*) *Ordinis* et *concinnitatis* vna omnium seruantissima est *A Combinatoria*, et *campum* aperit obseruationibus et meditatio bus et applicationibus *longe lateque vastissimum*. HINDENB. Sy Combin. Praef. p. VI.

**) COUSIN dit dans le discours préliminaire de son Astr nomie physique „Qu' on me permette de remarquer q „les astronomes à qui l'on doit les découvertes les plus i „portantes s' étaient d'abord distingués dans l'Analyse Math „matique. Nous avons vû plus de vingt ans un de nos pl „célèbres observateurs (De la LANDE) expliquer au Colle „Royal les ouvrages des NEWTON, des EULER, des MA „LAURIN, des BERNOULLI, etc. et devenir, pour ain „dire, le créateur d' une chaire, destinée à perpétuer en Fran „le goût des sciences physico-mathématiques."

rderont pas à se présenter. Le réellement curieux ujours uni à l' utile, quoiqu' il n' y paraisse pas remier abord. Pour en donner un exemple avec ue variation, je choisis la permutation de *abcd* diquant les déplacemens à droite par les chiffres po- 1, 2, 3, et ceux à gauche par les chiffres néga- r, ź, ß,

abcd	0000
abdc	00*x*1
acbd	0*x*10
acdb	C*xx*2
adbc	02*xx*
adcb	0ź02
bacd	*x*100
badc	*x*1*x*1
bcad	*xx*20
bcda	*xxx*3
bdac	*x*ź21
bdca	*x*ź03
cabd	ź110
cadb	ź1*x*2
cbad	ź020
cbda	ź0*x*3
cdab	źź22
cdba	źź13
dabc	ß111
dacb	ß102
dbac	ß021
dbca	ß003
dcab	ß*x*22
dcba	ß*x*13

Cette colonne de quaternaires à somme nulle, a donc malgré son asymmétrie apparente, une loi très simple.

Ce serait ici le lieu d'expliquer d'autres développemens combinatoires: mais faute des cadres ⌐¬ et ⌐⌐ je devrais avoir recours à un nouveau système de signes dont je ne veux pas accabler gratuitement le lecteur puisque je devrais les rétraduire dans mon ouvrage principal. La gêne de l'impression m'a déja obligé à trop d'expédiens pour être supportablement clair et concis. En fait de caractères on ne saurait être assez économe de l'attention des géometres: ils préferent quelque complications aux abbréviations arbitraires parce, que leur esprit combinateur saisit sans peine les conséquences et que la mémoire s'effarouche des suppositions répétées. Celle-ci, qui perd de son activité à mesure que le jugement prend le dessus, mérite les plus grands égards chez chaque sorte de lecteurs: l'âge adulte ne se familiarise aisement qu'avec les systèmes caractéristiques bien classés et sévérement distingués dans leurs parties. C'est pourquoi les nombres, dont la suite est la plus frappante pour tous les hommes, seront constamment les meilleurs élemens des grandes combinaisons,*) tels que les développemens analytiques, les nomenclatures techniques, les langues universelles, etc. Les nombres renferment virtuellement l'idée d'ordre et c'est dans ce sens sans doute que Pythagore, le plus grand homme de la haute antiquité, y rapportait tout, et qu'ils sont nommés dans le chapitre neuvième de la sapience, où Dieu est dit

*) Operationum combinatoriarum *fundamentum* et veluti *norma* proposita est in *numeros* (ex ordine atque etiam per saltus progrediendo) *scribendi modo ac ratione*, vna fere atque vnica h. e. praestantissima; cum ipsi numeri, *Permutationum, Combinationum* et *Variationum* perfectissima et simplicissima omnis generis exempla praebeant — Totum itaque negotium ad *simplicissimas numerandi Leges* reduximus. HINDENB. Syst. Comb. p. XVI.

ir formé le monde au moyen des trois sciences ma-matiques.

Παντα μετρῳ και ἀριθμῳ, και ςαθμῳ διεταξε.

Il combina toutes choses par mésure, nombre et ids:

Combina est la traduction la plus exacte, de διέταξε.

Le manque de cadres, que les lignes de l'impression rendent pas bien en petites formes, les seules com-des pour le calcul, m'empêche aussi de donner au-rdhui la relation des principales fonctions combina-res. J'aurais adopté pour elle la notation de HINDEN-URG, parfaite autant que le système alphabétique le mporte: mais j'eûse dû alors expliquer par ordre une menclature savante; ce qui aurait changé en traité mel ce rapide apperçu de l'Analyse Combinatoire al-mande, composé uniquement en faveur des personnes ui ne la connaissent que peu ou point du tout. En veloppant la méthode, je me suis surtout attaché à ésenter son esprit et je me suis peu arrêté aux détails. iconque les aime, poussés aussi loin qu'il est possi-, trouvera son fait dans les deux ouvrages suivans:

Grundriss der Combinationslehre, par le ofesseur STAHL.

Lehrbuch der Combinatorischen Ana-sis, par le Professeur WEINGÄRTNER.

Ces ouvrages qui ont paru l'année dernière (1800), recommandent par leur marche méthodique; on y irerait plus d'applications; elles paraîtront apparem-nt dans les secondes parties, que l'un et l'autre au-r fait espérer.

Il y a deux manières distinctes d'introduire à une orie: la synthetique, qui établit une suite de

principes pour en donner après coup les applicati
c'est celle de mon Développement général:
est souvenr séche. Afin de délasser en variant,
employé dans ce Polynome Combinatoire
manière analytique, qui se propose un probl
où les principes se présentent comme par ha
Cette derniere, à beaucoup près la plus amus
est aussi la plus instructive, en ce qu' elle est une
vention continuelle pour le lecteur, dont elle aceou
pour ainsi dire, les idées, en revanche, les longue
et les lacunes deviennent souvent son partage.
Traité d' Analyse Fonctionnaire Combi
toire réunira les deux manières et sera d'une
due convenable. Comme j' aurai pour lui des ca
d'une pièce, la notation leibnitzienne sera plus
et sans aucune équivoque, outre qu' elle sera,
ralement parlant, plus courte. Ce n' est qu' à c
notation à cadres, formée de peu d' elemens u
mement combinés, que j' attache quelque prix:
présente n' en est qu' un surrogat imparfait.

Si dans cette courte esquisse je n' ai pû qu' e
rer la matière, j' ai dumoins tâché de ne pas m
le reproche de négligence.

IV.

ANMERKUNGEN ZU BÜRMANN'S ESSAI DE CARACTERISTIQUE COMBINATOIRE

VON

C. F. HINDENBURG.

Die vorzüglichsten hieher gehörigen Stellen aus Leibnitzens Schriften stehen am Ende der Vorrede meines *Nov. System. Permut. et Comb. p. X — XII.*; welchen ich aus einem Briefe von Bürmann an mich, noch folgendes hier beyfüge:

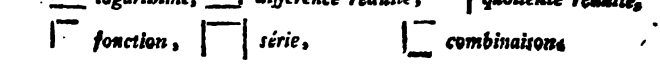
„Leibnitzens unermeßlicher Plan ist freylich nicht der meinige; aber auch Leibnitz konnte jenen nicht ausführen. Ich habe seine *Opera* wieder aufmerksam durchgegangen; ohne auch nur die geringste Spur von Verwirklichung seiner Gedankenalgebet (*Analysis suprema, ad quam constituendam*, wie Leibnitz sagt; *Alphabeto cogitationum humanarum, et ad inventionem eius Alphabeti, Analysi Axiomatum opus est. H.*) darinn angetroffen zu haben. In Leibnitzens philosophischen Schriften, die Raspe gesammelt hat, sagt dieser zwar, daſs in den Fragmenten eines von Leibnitz angefangenen Werkes *de augmentis scientiarum*, sich Proben der *Characteristicae Combinatoriae* befinden; aber ich glaube, daſs sie nur zum Surrogate gehören, welches Leibnitz (der in der Folge seine eigentliche Characteristik wohl selbst für unausführbar halten möchte) an mehrern Orten als Gedankenschrift vorschlägt: jede Sache einstweilen mit einer charakteristischen Zahl zu bezeichnen."

Das Übrige des Briefes handelt von der Möglichkeit einer Universalschrift, die Bürmann in folgendem sechsten Abschnitte seiner Charakteristik: *sur la science des Combinaisons*,

appliquée aux autres sciences par l' Idéographie, vorgetragen, u ihr den Anstrich, zum Theil auch die Einrichtung, analy scher Functionenformen zu geben gewusst hat. Etwas dav habe ich unten (Note 20) beygebracht.

2) Das ist der Aufsatz, der hier (S. 5.) nach der *Ta des Matières* folgt, den ich mir von seinem Verfasser zur v läufigen Bekanntmachung erbeten habe, und der mit dem f genden 6ten Abschnitte: „Anwendung der Combinationslel auf eine ideographirte Zeichensprache," in Verbindu steht. Man wird diese meisterhafte Darstellung um so me mit verdientem Beyfall aufnehmen, da sie eine vortrefliche A und Übersicht des Ganzen gewährt, und die weitere Ausfü rung desselben wohl noch einigen Anstand nehmen dürft indem BÜRMANN wegen einer ganz neuen von ihm einzufü renden *Notation combinatoire*, beschlossen hat (und bereits t tig daran arbeitet) den Wissenschaften ein beträchtliches M he- und Kosten-Opfer zu bringen, und seine Lieblingsi auszuführen, seine Symbolistik nehmlich halb gedruckt (P *mière Partie*) halb gravirt (*Seconde Partie*) herauszugeben. D aus ersieht man zugleich, woher in der *Troisième Partie* *Section* 3me komme: *Instruction pour graver etc.* Der Verfas empfiehlt nämlich darinn die Ausübung des Kupferstechens len Schriftstellern, die neue Ideen und ihre Zeichen, d die Buchdruckerkunst ihre Hülfe versagt, geschwind in lauf bringen wollen.

3) Von diesen *Principes généraux d' Algèbre, ou d' écri analytique* hat mir der Verfasser bereits eine gut gerathene Kupfer gestochene Probe zugeschickt. Die Zeichen dar sind sämmtlich aus einer sehr einfachen Haupt- o Grundform (ein Rectangel mit seinen beiden Diagonal der Linien Durchschnitte punctirt oder unpunctirt) abgelei „Wie man in der Arithmetik (sagt BÜRMANN) Ziffern „Zusammensetzungen derselben, oder Zahlen, hat, so ne „ich in der Analysis analytische Ziffern und anal „tische Zahlen oder Functionen an. Die aus „Hauptform abgeleiteten *chiffres analytiques* (die sich hier ni „darstellen lassen) erkennt man an den schiefen Winke „die *nombres analytiques* sind entweder wirkliche oder hypo „tische Zusammenfügungen der *chiffres analitiques*. Durch rec „Winkel werden bezeichnet



die beiden letztern machen die combinatorischen unctionen aus; und so werden, arithmetische, ana-rtische und combinatorische, Ziffern und Zahlen, ler Functionen, leicht und sicher von einander unterschie-n, und können ohne Zweydeutigkeit untereinander gemischt rkommen. Ein Umstand, der vornehmlich meine neue al-braische Schrift veranlafst hat." Einige Fragmente aus die-*Principes généraux d'Algèbre* werden in der Folge (S. 22-28) Auszuge mitgetheilt.

4) „*Qui additione datum numerum producendi varietates, et tractione discerpendi, collegerit, quod utrumque eodem recidit, minotus non est. Viam autem colligendi combinationes discerptionum, ndimus proxime. At ubi plures partes admittuntur, inus panditur abyssus discerptionum.*" LEIBNITZ *dissert. rte Comb. sub fin. Probl. III.* Diese Aufgabe habe ich (*In-Digit.* §. *XXII. p.* 73. *seq.*) zuerst gelöfst. Ohne sie, und ge damit verwandte, in Richtigkeit gebracht zu haben, sich keine bedeutende Anwendung der Combinationslehre die Analysis machen. Vergl. *Nov. Syst. Comb. p. XVI.* und dortigen Noten.

5) In der Vorrede zu dieser zweyten Sammlung habe ich BÜRMANNS *Notation combinatoire*, wie ich sie damals kann-gesprochen. Jetzt ist sie sehr vereinfacht und auf die den Zeichen ⊓ und ⊏, mit ihren bestimmten Abzei-n für die nöthigen Modificationen, reducirt worden. e geben eine vollständige Sammlung von combinato-h-involutorischen, auf numerische, lexiko-phische und andere Anordnungen sich beziehen-Lokal- und Classen-Zeichen, deren Auflösung combinatorisch-analytischen Operationen abhängig ist. rere meiner Freunde und Correspondenten haben in ihren en an mich sich gewundert, dafs ich BÜRMANNS combi-rische Zeichnung, neben der meinigen, und zugleich mit pferung der grofsen und kleinen deutschen Buchstaben, Binomial- und Polynomialcoefficienten, in jener Vorre-ffentlich gut geheifsen habe. Ich denke über BÜRMANNS meine Zeichen immer noch so, wie ich mich dort über e (S. XIX — XXI der Vorrede) ausführlich erklärt habe. le können und werden, ohne Nachtheil der Sache, mit neben einander bestehen; und wenn man die (Note 3.) beyläufig angeführte Bürmannische Bezeichnung von Zif- und Zahlen aller Art bedenkt, so müssen, wenn eigent-e Buchstaben dabey überhaupt nicht gebraucht werden,

auch nothwendig die deutschen wegfallen. Erst dann, wenn BÜRMANN seine sämmtlichen Zeichen, ihrer Form, Beziehung und Wirkung nach, dem Publikum wird vorgelegt haben wird solches ein vollgültiges Urtheil über dieselben, in Absicht auf ihren absoluten und relativen Werth, fällen können. Inzwischen kann ich die Güte seiner Zeichnung, der meisten unbeschadet, im Voraus verbürgen.

6) So haben auch KARSTEN, KLÜGEL, PFAFF und Andere die Sache lange Zeit für *nugas difficiles* gehalten, wie sich Bürmann in einem Briefe an mich ausdrückt, worinn er sich einen Neubekehrten der combinatorischen Analysis nennt und vielleicht sind KRAMP, KÄSTNER und LAGRANGE (Arch. d. Math. H. VII. S. 350. Note) viele Jahre hindurch die einzigen gewesen, die den Werth der Sache gekannt und gehörig gewürdigt haben. Auch da meine Classen- und Ordnungszeichen und die combinatorisch-involutorische Auflösung derselben, sich schon Beyfall und Achtung erworben hatten, zweifelte PFAFF noch an dem Nutzen meiner Lokalzeichen $p^m \times n$, $\frac{p}{q} \times (n+1)$ u. s. w. die er unzweckmäfsig und überflüfsig ansah (Erste Samml. c. a. S. 124.) bis ihn diese zu den wichtigen Aufschlüssen (das. S. 125—152. und zw. Samml. S. 154—194.) mit Leichtigkeit führten. Der *savant ami*, der BÜRMANN zurecht gewiesen und auf bessere Gedanken gebracht hat, ist vermuthlich Doctor KRAMP gewesen, durch den jener zuerst TÖPFERS polemische Schrift hat kennen lernen (Arch. d. Math. H. VIII. S. 509, 510.) Der Umstand, dafs über die Sache in der Folge ein Streit entstand, hat auch in der That, so wie die vielfache Anwendung auf interessante Aufgaben und ihre rein-combinatorische Darstellung, die weitere Aufnahme und Verbreitung derselben sehr befördert. Hoffentlich hat auch meine Abhandlung (Erst. Samml. S. 153—304.) vornehmlich aber die darinn aufgestellte und mit Beyfall aufgenommene Darstellung und Deduction des polynomischen Lehrsatzes zu dem allgemeinen Producten-Probleme, das Meiste beygetragen, alle noch übrigen Schwierigkeiten und Mifsverständnisse gründlich zu heben und gänzlich zu zerstreuen.

7) Diesen Gedanken hat schon vorher ein anderer würdiger Gelehrter gehabt, und ihn, in Verbindung eines Freundes der die Redaction der Materialien über sich genommen hatte, bereits auszuführen angefangen. Ich würde Beyde um die Wissenschaften sehr verdiente Männer hier nennen, wenn die

nehmen, wäre dessen Vollendung auch nicht durch un-
ergesehene Umstände gehindert worden, ihrem wohlerwor-
n Ruhme noch etwas zusetzen könnte. Aber freuen wird
jenen würdigen Mann und Meister in seinem Fache, der
Gedanken zuerst gehabt hat, wenn er sehen wird, dafs
noch endlich die Sache in die Hände eines vortrefflichen
lysten gerathen ist, der, so wie Er, die mannigfaltigsten
tnisse aller Art besitzt, und, nicht weniger wie Er, ge-
t, und in England, Deutschland, den Niederlanden,
nkreich und Italien zu Hause ist.

) Nach EULERS Vorgange und vielfältigen Beyspielen, auf
che sich auch ARBOGAST in seinem neuesten vortrefflichen
rke: *Calcul des Dérivations* (*Pref. p. XXII.*) beruft, kann man
deutschen Buchstaben in analytischen Schriften allerdings
nlässig und bekannt ansehen. Ich habe daher den Gebrauch
selben in vorkommenden Fällen, wo vielerley Buchstaben
ig sind, in Schutz genommen, und zwar in der gerechten
d billigen Voraussetzung — *damus hanc veniam petimusque*
sim — dafs, wenn die Ausländer etwas von den Deut-
hen lernen und gebrauchen wollen, sie sich auch die dafür
troffene Einrichtung gefallen lassen können; um so mehr,
da durch Einführung anderer Zeichen statt der deutschen (ne-
en den andern) Buchstaben, ein grofser Theil der schon beste-
nden Harmonie meiner combinatorischen Formeln aufgeho-
n werden würde. Werden aber, wie BÜRMANN (Not. 3, 5) thut,
e Buchstaben, überhaupt aufgegeben, so müssen denn doch
ch die deutschen nothwendig wegfallen. Dafs aber wirklich
r Widerwille der Ausländer gegen die deutschen Buchstaben,
nehmlich aus den im Texte ausführlich angegebenen Ursachen
groſs ist, als hier behauptet wird, und folglich die Einfüh-
ng derselben nicht blos eingebildete, sondern wirkliche, noch
t vorhandene, Schwierigkeiten hat; dafür kann ich, zu je-
n in der Vorrede der zweyten Sammlung c. a. A. (S. IX. No-
) angeführten Belegen, noch folgenden ganz neuen, gewifs
ht unwichtigen, beyfügen, wo ein verdienter Veteran einer
ühmten Akademie der Wissenschaften, unterm 28. Jun. 1800.
mich schreibt: *Pour Vos ouvrages combinatoires, ils meriteroient*
être traduits dans toutes les langues, et je crois réellement, que Vous
rendriez service au public étranger, en supprimant les lettres Go-
hiques dans Votre notation. J'ai appris l'Allemand avec soin, il
a près des trente ans, j'ai voyagé longtems en Allemagne, et je n'ai
mais pu venir à bout de former lisiblement ces caractères

Gothiques, ni même les lire dans l'écriture de ma
Et je Vous assure que je n'ai pas manqué de bonne volonté.

9) Hier wird (in 1 und 2) das combinatorisch-analy[tische] Geschäft im Allgemeinen kurz und bündig darge[stellt]. Alles beruht auf der arithmetischen Verbindung der Rei[hen] und ihrer Glieder; die Hauptsache dabey ist die zu bestimm[ende] Norm des allgemeinen Gliedes; diese giebt den tachygr[a]phischen Ausdruck der combinatorischen Regeln; aus diese[r] mufs sich jedes verlangte Glied auf die möglichst einfache A[rt] darstellen lassen; ein kurzer und bündiger Beweis sichert d[ie] Zulässigkeit des combinatorischen Verfahrens; einige ausg[e]wählte, schriftlich wiederholte, Anwendungen desselben verschaffen die nöthige Fertigkeit für die Ausübung. Die ob[en] genannten Regeln beziehen sich auf die combinatorischen Op[e]rationen, die man, wie in Zahlen so auch in Buchstaben, [in] Beziehung auf ihre bestimmten Zahlenwerthe, arithmetis[ch] oder rein-combinatorisch anordnen, und klassenweise od[er] lexikographisch, nach jedem willkührlichen Gesetze, am best[en] aber involutorisch, vortragen kann. Anwendungen der lex[i]kographischen und Klassen-Anordnung werden bey der Aus[-] führung von (4 und 5) mehrere gegeben werden.

10) Der *Polynome Combinatoire* hat zwey Haupttheile. De[r] eine betrifft die Producte, der andere die Potenzen d[er] Reihen (*Polynome Produit* und *Polynome Puissance*). Jener (d[as] Polynomische Productenproblem) ist allgemeine[r] dieser (der Polynomische Lehrsatz) zeigt einen se[hr] ausgebreiteten Nutzen für die Anwendung auch auf andere Sätz[e] (z. B. den Taylorischen Lehrsatz auf das Polynomium bezogen) die ihn als Elementarsatz voraussetzen. Den natü[r]lichsten Übergang von jenem auf diesen, und wie das a[uf] combinatorischen Wegen mit gröfster Leichtigkeit geschieht habe ich (Erste Samml. c. a. A. S. 229, 230. No. 123—125) gezeigt. Der (im Texte No. 3.) angeführte Lobspruch Profe[s]sor Kramps, betrifft diesen letzten Satz. Eine ausführlich[e] Bearbeitung des *Polynome Combinatoire*, nebst wichtigen und i[n]teressanten Anwendungen desselben, hat mir Bürmann in s[ei]nen Zeichen vorgetragen, bereits vorlängst auf meine Bi[t]te fürs Archiv zugesendet. Die Ausführung aber dieser Zeich[en] im Drucke fand Schwierigkeit, und hinderte daher die Publ[i]cation dieses lehrreichen Aufsatzes, der aber durch die nac[h]herige Vereinfachung der Zeichen nur noch mehr gewonn[en] hat.

11) Ein ausführliches chronologisch geordnetes Verzeich- aller hieher gehörigen Schriften findet man in Profes- WEINGÄRTNER's Lehrbuche der combinatori- en Analysis, gleich nach der lehrreichen Vorrede zum m Bande (Seite XLIII—XLVIII.) in 26 Numern aufge- t. Als Ergänzung sind darinn noch folgende Schriften ls einzuschalten, theils beyzufügen:

27. CHR. KRAMP *de Aequationum primi ordinis solutione generali. Erfordiae*, 1798.

28. MURHARDT combinatorische Behandlung der Kreisbögen und trigonom. Functionen; in der Götting. Societät vorgelesen.

29. *De reticulis cryptographicis. Auct.* MAUR. DE PRASSE. *Lipsiae*, 1798.

30. I. C. WEINGÄRTNER's Lehrbuch der combinatorischen Analysis, nach der Theorie des Herrn Professor HINDENBURG's ausgearbeitet. Erster Theil, Leipzig, bey Fleischer 1800. Zweyter Theil 1801.

31. C. D. M. STAHL's Einleitung in das Studium der Combinationslehre, Jena und Leipzig, 1801.

32. E. F. RETTBERG, die Gesetze der nach ihrer Gröfse geordneten Brüche, mittelst der combinatorischen Analysis aufgesucht. Hannover, 1801.

33. *Du Calcul des Dérivations, par* L. F. A. ARBOGAST. *Strasbourg chez Levrault.* 1800.

(Dieses schätzbare Werk, eine erweiterte Anwendung des Differenzialcalculs, ist wegen einiger Berührungspuncte, die es mit der combinatorischen Analysis gemein hat, hier mit angegeben.)

34. Mein Programm als dam. Prokanzler der Universität, worinn gezeigt wird: *Functionum Polynomiorum per series adhibito Calculo Derivationum nuperrime invento, ad substitutiones in substitutiones operosas deducere, et in combinatorias tandem, quibus nullo modo carere potest, operationes et involutiones desinere. Lipsiae*, 1801.

12) Eine vergleichende Übersicht und Zusammenstellung yderley combinatorischer Zeichen, der meinigen und der rmannischen, in einer besondern Tafel, ist nützlich und chtig. BÜRMANN kann dabey auf den Dank einer grofsen enge Leser rechnen, und gerade derjenigen, die, weil sie e Sache schon aus dem Gebrauche meiner Zeichen kennen, n besten im Stande sind, die seinigen geschwind zu übersen und von ihrem Werthe ein vollgültiges Urtheil zu fällen,

13) Ich will hierüber BÜRMANN's Grundsätze aus zw
seiner Briefe mittheilen: —

„Mein Augenmerk bey dem Baue der combinatorischen
„chen war erstens, die am häufigsten vorkomme
„Functionen einfach zu bezeichnen; zweytens, sie so
„zurichten, dafs die combinatorischen und andern Fun
„nen, unter einander gemischt, allen analytischen O
„tionen unterworfen werden können, und so combin
„rische Entwickelungen, Umkehrungen, D
„ferentiationen und Integrationen aufzus
„len. Die Differenzial-Analysis führt geschwind zu H
„resultaten, welche die combinatorische hernach ausarb
„und entwickelt. — Die ersten Anfangsgründe sind
„mir kurz und gedrängt, enthalten wenige Kunstwörter
„ein Minimum von Erklärungen. Eben so sparsam bi
„mit den Regeln gewesen. Meine Absicht ist, den Lese
„schwinder mit den nothwendigen (und nur mit den n
„wendigen) Grundsätzen bekannt zu machen, um ihn, d
„Abkürzung der Vorlehren, sobald als möglich, mit int
„santen Anwendungen zu beschäftigen, die den Nutzen
„Regeln zeigen und für die Wissenschaft einnehmen.
„aufmerksame Abschreiben und Wiederholen einiger gut
„wählten Beyspiele machen weit schneller, als die verb
„Vorschriften, mit den combinatorischen Regeln und
„fahren vertraut

„*Segnius irritant animos demissa per aures,*
„*Quam quae sunt oculis subjecta fidelibus* —"

Vortrefflich! um so mehr, da BÜRMANN von der S
nicht blos projectmäfsig spricht, sondern schon öfters G
genheit gehabt hat, die Methode, in seinen Vorlesun
praktisch zu prüfen und ihren Nutzen zu bewähren. Wer v
sich von einem solchen Lehrer nicht gern und willig unterr
gen lassen!

Dafs hierbey manche Besonderungen (*détails ou partic
ées*) dem Scharfsinn und Fleifse des Lesers überlassen blei
entschuldigt BÜRMANN mit MONTESQUIEU: *Qui peut tout
sans un mortel ennui?* Nur Lükken freylich müssen nicht ge
sen werden, wie in dem *Esprit de Loix* mehrere vorkomm
die selbst der geübte Denker nicht leicht auszufüllen verm

14) Es scheint ins Unbegreifliche zu fallen, wie B
MANN zehn Alphabete der deutschen Bezeichnung
durch zwey Zeichen und ihre Modification habe
setzen können. Für diejenigen also, die meine Zeichn

[illegible] kennen, will ich hier erinnern, daſs bey mir ein gan-
[illegible] Alphabeth nur für ein Zeichen gilt. So bedeuten
[illegible] die groſsen lateinischen senkrecht stehenden Buchstaben,
[illegible]; die schiefstehenden, Variationen;
[illegible] groſsen deutschen Binomialcoefficienten; die klei-
[illegible] Polynomialcoefficienten; u. s. w. Weil es aber
[illegible] den Combinationen und Variationen, mehrere Klas-
[illegible] für einen und denselben Exponenten, mehrere Bi-
[illegible] Coefficienten; für die Buchstabenproducte, nach
[illegible] und Verschiedenheit der Buchstaben in denselben, meh-
[illegible] Polynomialcoefficienten giebt; u. s. w. so wer-
[illegible] die ersten, zweyten, dritten, ... dieser Klassen
[illegible] Coefficienten, durch die zugehörigen ersten, zwey-
[illegible], dritten ... Buchstaben dieser Alphabete, also nach
[illegible] Folge der Buchstaben, bezeichnet. Die lexicographi-
[illegible] Ordnung wird von der numerischen Klassen-Darstellung
[illegible] blumichte Buchstaben A, B, C --- und insbe-
[illegible] die involutorische Anordnung von andern com-
[illegible] durch die besondern Buchstaben J und [illegible]
[illegible]. Von den beyderley Zeichen Mehreres in [illegible]
[illegible] zu der zweyten Sammlung combinatorisch-analytischer
Abhandlungen (S. XI—XIX.). Daſs ich schon vorher [illegible]
der Bürmannischen gleichbedeutende Zeichnung [illegible]
[illegible] S. XII, XIII und XVII). Die von mir gewählte [illegible]
[illegible] durch Buchstaben, vereinigt das Minimum der [illegible]
[illegible] im Drucke mit dem Maximum der bequemlichen [illegible]
[illegible]; und so hat denn auch Bürmann [illegible]
[illegible] die vollkommensten schlechterdings anerkannt. [illegible]
[illegible] Buchstaben angeben und darstellen [illegible]
XX.

15) Bürmann urtheilt über die beyderley [illegible]
wie ich: „Sie werden, ohne Nachtheil [illegible]
[illegible] und nebeneinander bestehen." Was [illegible]
[illegible], habe ich (Erste Samml. [illegible]
[illegible]ben. Schon längst bekannte, [illegible]
[illegible] täglichen Gebrauch gelänge: [illegible]
[illegible]zten Ordnung und Folge [illegible]
[illegible]nde; mit bestimmten Namen [illegible]
[illegible]h bequem lesen und schreiben lassen — [illegible]
[illegible]chstaben sind — werden immerfür [illegible]
[illegible]len, und da, wo sie bereits im Gange [illegible]
[illegible]ern. Inzwischen kann es nicht [illegible]

ihrer Form so einfache und sich auszeichnende, der Bedeutung nach fafsliche und in der Anwendung leichte Zeichen, nicht blos bey Ausländern (vornehmlich solchen, denen die deutschen Buchstaben fremd, also beschwerlich zu lesen und noch mehr zu schreiben, sind) sondern auch selbst in Deutschland verdienten Beyfall finden, und den Geschmack an der combinatorischen Analysis sehr werden ausbreiten helfen; wozu die häufigen Anwendungen, die BÜRMANN von seinen Zeichen und wichtige und interessante Aufgaben gemacht hat, nicht wenig beytragen werden.

16) Ich billige es sehr, dafs BÜRMANN die von LEIBNITZ und BERNOULLI gebrauchten so zahlreichen Kunstwörter unbenutzt vorbeygegangen ist, zumal da die wenigsten auf das sich beziehen, was hier die Hauptsache ausmacht: wirkliche Darstellung der Verbindungen gegebener Dinge. Ich habe einige dieser technischen Benennungen (*Nov. Syst. Perm. et Comb. p. IV — VI. Sect α*) erklärt, aber wenig oder gar keinen Gebrauch in der Folge davon gemacht; die beybehaltenen jedoch genau in dem Sinne gebraucht, den ihnen ihre Urheber gegeben hatten. Dagegen kommen einige von mir gebildete, desto häufiger in meinen und Anderer combinatorischen Schriften vor; und ich habe um so weniger Bedenken getragen, sie aufzuführen, da sie, durch die Umstände der Sache gleichsam von selbst herbeygeführt wurden; auch passende und Hauptbegriffe bezeichnende Kunstwörter vornehmlich geschickt sind, sich kurz und präcis auszudrücken. Ich will hier die wichtigsten anführen und neben einander stellen:

„Combinatorische Elemente und ihre Zahlenwerthe; Combinatorische Operationen; Zeiger; Complexion; Klasse; Ordnung; Summen- und Distanzexponent; gut geordnete Complexionen, Ordnungen und Klassen, mit und ohne Wiederholung, an sich und zu bestimmten Summen; Lokalzeichen und ihre combinatorischen Werthe; verbundene, Scalen für jene und Zeiger für diese; arithmetisch- und rein-combinatorische, recurrirende und involutorische Form; arithmographische, lexikographische und stelegraphische *) Involution und Evolution; u. s. w."

*) Säulenförmig (in mehrern verticalen Reihen nebeneinander, in die Tiefe [Arch. der Mathem. H. I. S. 15.]) geschriebene combinatorische Anordnung oder Involution. Man könnte auch stylographisch (von στύλος, *columna*) schreiben. Ich ziehe aber stelegraphisch vor. Denn einmal

17) Daher läſst sich jede Zahl jedes Systems von einer unbestimmten Anzahl Grundzeichen oder Ziffern, allgemein durch die Reihe

$$\ldots dx^3 + cx^2 + bx + a + \delta x^{-1} + \gamma x^{-2} + \delta x^{-3} \ldots$$

darstellen. Für das dekadische System ist bekanntermaſsen $x = 10$, und die Coefficienten von x drücken jeder eine der zehn Zahlziffern $0, 1, 2 \ldots 9$ aus. Für ein System von n Ziffern oder Zahlzeichen wäre $x = n$, u. s. w. Man vergleiche meine Auflösung [illegible] und die dortige Bemerkung [illegible], etc. [illegible] mehr, die erste und einfachste Aufgabe der Arithmetik: „Aus den gegebenen „Ziffern eines Zahlensystems, alle Zahlen nach der Ordnung; „oder: für jede gegebene Zahl, die nächstfolgende zu schrei„ben" ist eine combinatorische, und in so fern in der Arithmetik nur ein Lehnsatz (*Lemma*) aus einer andern, vor aller Arithmetik vorhergehenden Wissenschaft, der Combinationslehre. Und eben diese Betrachtung ist es, die mich auf das Hauptmoment in der combinatorischen Analysis, auf die Involutionen aller Art leitete (Arch. der Math. II. I. S. 17—22.) BÜRMANN bemerkt sehr wahr, die ersten und einfachsten Regeln der Arithmetik seyen nichts anders als eine Numeration unter verschiedenen Ansichten betrachtet; die arithmetischen Operationen sind nämlich blos bedingte combinatorische, wo man den absoluten und relativen Werth der Ziffern für die Zahlen, und dieser Zahlen Beziehung und Wirkung auf einander in Betrachtung zieht.

18) Die Analysis und Algebra hat man nicht immer genau und bestimmt genug von einander unterschieden. BÜRMANN sagt in einem seiner Briefe, wo er von der Analysis eben dieselbe Erklärung giebt, wie hier im Texte: „*on ne calcule que des „rapports, et ceux-ci ne sont que les nombres vulgaires modifiés arbi„trairement; les chiffres généraux a, b, c, etc. ne sauraient représenter „autre chose.* NEWTON *a donc très bien défini l'Analuse: Arithmé„tique universelle. J'appelle avec* BÉZOUT, *Algèbre, la no-*

wird *stele* oder *stela* beym VITRUV überhaupt für Säule gebraucht; dann heiſst στήλη insbesondere jede Säule, in Rücksicht einer darauf befindlichen nachrichtlichen Aufschrift; und so kann es eine Gränzsäule, Friedenssäule, Bundessäule, Grabsäule (einen Leichenstein) und, nach dem Gebrauch unserer Zeiten, eine Postsäule, einen Wegweiser etc. bedeuten. Und was sind denn die verticalen Buchstaben- oder Zahlencolonne anders als Säulen mit Aufschriften? — Wegweiser für die Involutionen?

„tation tachygraphique, qui est à l'Analyse ce que les notes „Musique sont à la composition."

„Deux expressions du même nombre, ou deux fonctions de „valeur, prennent le nom d'équation, dès qu'un des élemens est „terminer. Si plusieurs le sont, l'équation sera susceptible d' „de formes, qu'on voudra, puisqu'au moins un des elemens dem „arbitraire. C'est sur ces équations qu'opère le calcul des diffé „de tous genre; calcul, qui a l'évaluation des fonctions, pour obj „pour resſource dans les cas difficiles, le développement en „mes plus commodes."

BÜRMANN setzt also das Geschäft der Analysis in die findung und Bestimmung der Norm der techni Operationen für die zu suchenden Gröſsen; die Norm aber, sowohl dem Ausdrucke als vornehmlich der Auflö nach, gehört der Algebra zu. Dieser Unterschied kommt dem, wie ihn Professor KLÜGEL (Erste Samml. c. a. A. S 49) festsetzt, im Wesentlichen überein. Zu den vorläng kannten, sehr mannichfaltig verschiedenen Normen oder men der Gröſsen, ist nun neuerlich die combinatoris hinzugekommen, und in die Analysis von mir eingeführt den. Die *Tachygraphie combinatoire*, wie sie BÜRMANN ne zeigt sich am wirksamsten in den combinatorischen volutionen, dieser ganz eignen, an Einfachheit und Le tigkeit der Darstellung und Entwickelung alles übertreffen Construction der gesuchten Gröſsen aus ihren Elementen: man Alles, ohne vorgängige Reduction, sogleich gut geord findet, wo das Auge, mit Einem Überblicke die gesetzl Ökonomie weit schneller auffaſst und dem Verstand übe fert, als es der blos verbale Vortrag nicht zu thun ver Von diesen wichtigen Hülfsmitteln der Analysis, die sich wöhnlich auf bestimmte Summen beziehen, habe ich in (Erste Samml. c. a. A. S. 52 — 54. Note c) angeführten Ste ausführlich gehandelt, denen man noch die lexicographisc und arithmographischen ganz vollendeten Involutionen zu bestimmten Summen (Das. S. 202. und 204.) beyfügen ka Beyde geben und verschaffen, wie schon Prof. PFAFF (A der Math. H. VII. S. 348. Note) bemerkt hat, deutlich gezei nete, allgemeine Formeln, die von den blos in Worten w läuftig ausgedrückten Regeln sehr lebhaft abstechen.

„Jede Function (sagt BÜRMANN in einem Briefe an mi „ist ein arithmetischer Satz, nämlich die (meistenth „tachygraphische) Vorschrift der arithmetischen Zählart „welche die Function in eine Zahl umsetzen. Function kön

so auf deutsch Satz übersetzt werden, und Analysis Satzkunde, welches mit dem Holländischen *Stellkonst* übereinkäme, und Algebra (in BEZOUT's Sinne, nach dem ungelehrten Sprachgebrauche: *c'est de l'algèbre pour moi*) würde Satzbezeichnung heifsen müssen." BÜRMANN will jedoch diese deutschen Namen keineswegs zum Gebrauche empfehlen. Er hat dadurch nur die Bedeutung jener Benennungen in der seinigen angeben und nachweisen wollen. Von der Etymologie des Worts Algebra und von der *Cosa* der Cossisten unter anderm auch KÄSTNER, in der Vorerinnerung zur dritten Ausgabe seiner Analysis endlicher Gröfsen.

19) Man kann den nützlichen Gebrauch approximatorischer Formeln und Vorschriften durch mehrere in der Astronomie gewöhnliche indirecte Verfahren sehr gut rechtfertigen. Ich will hier nur der häufigen Anwendungen der *Regle des fausses positions* gedenken, „*qui rend les Méthodes indirects, et leur donne cet air d' élégance qui plaît tant aux Géometres. Mais comme ces Méthodes sont moins compliquées, plus intelligibles, et plus faciles dans la pratique, elles sont d' un très-grand secours dans l' Astronomie, et même, lorsqu' elles vont au but par un chemin sûr et abrégé elles sont préférables aux Méthodes directes, qui supposent souvent dans les observations, une précision à la quelle il est impossible d' atteindre, et qui par là deviennent inutile dans la pratique.*" (*La Caille Leçons elem. d' Astron. Avertiss. p. X.*) Wer sucht wohl die Wurzeln der Gleichungen vom dritten und vierten Grade nach CARDAN's und BOMBELLI's Regel, und zieht ihnen nicht vielmehr die indirecten Annäherungsverfahren zum Gebrauche weit vor? Wie viel Formeln hat man nicht in der Dioptrik aufgeführt, die alle Empfehlung von Seiten der geometrischen Genauigkeit haben, die aber so verwickelt sind, dafs man erst von ihrer Schärfe nachlassen mufs, um sie praktisch brauchbar zu machen; und wieviel hat nicht hier der einzige EULER durch Einführung geschmeidigerer und approximatorischer Formeln geliefert!

20) Auch von seiner Ideographie, oder der *science des Combinaisons, appliquée aux autres sciences, par l' Idéographie*, hat BÜRMANN ausführliche Proben mir zugesendet; davon hier in der Kürze nur Folgendes, da sich die Figuren dazu nicht mit vorlegen lassen. BÜRMANN geht von einem *Paradigme général* oder *Prototype des grammes* aus, und leitet davon seine *monogrammes, dyogrammes, trigrammes - - - polygrammes* ab. Auf diese folgen einige *Distinctions* und *Arithmogrammes, ou lettres-nombres idéographiques, numériquement classés*; und nun *Dérivation* (*aux*

six places du paradigme); *Inflexion* (*aux mêmes places indistinc-ment*); *Interpouction*; und endlich die *Syngrammes, ou arithm-grammes, plus ou moins modifiés.* Dies sind schon modificirte Phrasen. Wie in der Algebra, stellt hier ein stenographisches Symbol oft die Aussprache mehrerer Zeilen vor. Auch ergiebt sich aus den vorgelegten Beyspielen, dafs diese Ideographie zugleich eine wahre Tachygraphie ist, und es noch um so mehr wird, dafs (weil BÜRMANN alle seine *grammes simples* an Linien setzt oder anhängt) man, wie für die Noten in der Musik, im Voraus linirte Blätter parat haben kann, die *grammes* darauf zu schreiben. Freylich mufs man, um sich diese Zeichen nach ihrer Bedeutung und Zusammensetzung geläufig zu machen, ein ernstliches Studium darauf verwenden, das aber dadurch allgemein erleichtert wird, weil diese Ideographie combinatorisch-analytisch ist. Andere pasigraphische und stenographische Zeichnungen, die ich damit verglichen habe, sind zu gekünstelt, und das gröfste unmodificirte Wort ist nach BÜRMANN's Ideographie leichter zu schreiben, als in der Pasigraphie nach MEMIEU ein Buchstabe.

„Mit der Ideographie (schreibt mir BÜRMANN) ist es wie „mit der combinatorischen Analysis; sie schreckt nur bis man „damit bekannt ist. Sie ist nicht viel schwerer als die Algebra, „aber gewifs sehr viel leichter als die chinesische Schrift (eine „unvollkommene Ideographie), welche man doch in einigen „Jahren geläufig lesen lernt, wie mich Reisende, die im Lande waren, versichert haben. Eine gute Ideographie läfst sich „viel geschwinder lesen, als gewöhnliche Schrift z. B. ∫Xdx, „welches Wort wir nie so deutlich darstellen werden. Aber freylich müfste die Ideographie schon so weit als die Algebra seyn. „Dazu ist denn nöthig, dafs man die Versuche häuft, und dafs „man nicht, wie bisher immer geschehen ist, selbige ihrer Unvollkommenheit wegen gänzlich verwirft."

21) Proben davon giebt das zunächst folgende *Développement général* (*no. II*) und das *Polynome combinatoire* (*no. III.*), ein Auszug aus den ausführlichern, mir früher zusendeten (wo worinn zugleich die Bürmannische Zeichnung so weit abgeändert worden ist, als nöthig war, um solche durch gewöhnliche Typen im Druck darstellen zu können. Was BÜRMANN weiterhin behauptet, die Differenzial-Analysis von der combinatorischen zu trennen, sey beyden nachtheilig, man müsse sie vielmehr innig mit einander vereinigen und amalgamiren, ist sehr wichtig, und nur eine neue Bekräftigung dessen, was er schon anderwärts (Arch. d. Math. II. VIII. S. 495.) gesa-

hat. Der dort, in meiner zweyten Sammlung combinato- - analytischer Abhandlungen, nachzuliefern versprochene atz von BÜRMANN, wird, seinem Inhalte nach, aber be- htlich erweitert und vervollkommnet, nun in dessen eignem he an seinem gehörigen Orte erscheinen.

12) Professor ARBOGAST hat in seinem Buche nur ein iges Beyspiel dieser Art (*no.* 440.) beygebracht. Von die- Abschnitt wird es genügen hier blos den Anfang und den luſs anzuführen: „*Voici un exemple où l'indice n de* D *est fraction.*" In diesem Beyspiele, wo $n = \frac{1}{2}$, findet AR- AST nach seinem Ausdrucke $D^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} . D^{-\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}}$, den Viertel- is, oder

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10 \cdots}{3.3.5.5.7.7.9.9.11 \cdots}$$

den bekannten Bruch nach WALLIS. Und nun der Schluſs: *ne m'étendrai pas d'avantage: je n'ai voulu qu'indiquer l'usage 'on peut faire des dérivées à indice fractionnaire et reveiller par là attention sur les différentielles à indice fractionnaire, sujet, qui a été en cultivé jusqu'à présent.*" (*Du Calcul des Dérivations* 374.) In demselben Werke (*no.* 456. p. 388.) hat ARBOGAST ne doppelte Entwickelung der oben im Texte stehenden unction $\Sigma^m y (\Delta x)^m$, wo $y = \varphi x$, angegeben und durch Beyspiel erläutert. Von diesen, wie dort bemerkt wird, mmt die erste mit der von BÜRMANN dem *Institut national de ence* (*Tom. II. des Mem. de l'inst. hist. p.* 16.) vorgelegten Rei- überein.

23) BÜRMANN's Verfahren, die Glieder der fortlaufenden che, wie gemeine Brüche, neben einander, nicht wie ge- hnlich in schiefer Richtung unter einander, zu schreiben, ist quem und Raum ersparend. So hat schon DAN. BERNOULLI Glieder solcher Brüche $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma} \ldots$, neben einander ellt, und *Indices* genennt, weil sie nachweisen, bis auf wie t man den continuirlichen Bruch verfolgen will. (*Nov. mm. Ac Petr. T. XX. p.* 24 *sq.*) BÜRMANN's Bezeichnung gewinnt ch dadurch, daſs nach der Zahl oder dem Buchstaben im nner, noch die Zeichen + oder — der nächstfolgenden Zäh- oder Brüche beygeschrieben werden.

24) Meine combinatorischen Behandlungen der continuir- hen oder Folgebrüche stehen (Arch. d. Math. Heft I. S. 47-

68: H. II. S. 154-195; H. III. S. 319-336). Im letzten A
satze habe ich gezeigt, wie mehrere grofse Mathemati
(EULER, LAMBERT, DAN. BERNOULLI) der Erfindung
combinatorischen Involutionen ganz nahe gewesen sind, o
doch im geringsten etwas davon zu ahnden. Dasselbe is
der Folge auch von DE MOIVRE (Arch. d. Math. H. IV. S. 3
und DE LA GRANGE (Töpf. Comb. Anal. S. 123) erwie
worden. EULER behauptete, das Gesetz, nach welchem Z
ler und Nenner in den successiven Werthen der continui
chen Brüche, aus den einzelnen Zählern und Nennern i
Glieder sich zusammen setzen, sey nicht leicht dur
zusehen (H. IiI. S. 322); und dennoch liegt das Gesetz
demselben Wege, den er eingeschlagen hatte. Die Weitl
tigkeit, in die man durch das gewöhnliche Verfahren ge
führte DAN. BERNOULLI'N auf eine Abkürzung, die er *pra
tissimum compendium* nannte, und die im Grunde nichts an
ist, als EULERS Regel, nur symbolisch ausgedrückt. Den le
Schritt, den BERNOULLI noch zu thun hatte, die einzel
Glieder der Zähler und Nenner für die reducirten Werthe
Brüche, nicht neben, sondern unter einander zu stellen,
so in eine figürliche Anordnung zu bringen, die
se Glieder fast laut von ihm forderten (Das. S. 333, 334); die
Schritt that BERNOULLI nicht, und verfehlte so die letzte
wichtigste aller Abkürzungen — die combinatorisch
Involution — die das Gesetz, das EULER suchte, und
(BERNOULLI) auf dem Fufse verfolgte, ohne es erreichen
können, ganz offen vor Augen legt, und so durch sinnlic
Anschauung dem Verstande überliefert. Darauf pafst n
BÜRMANN's Äusserung oben im Texte, und er hat gro
Vorgänger auf diesem Wege. Was die von BÜRMANN wei
hin angeführten *procedés combinatoires* von LAGRANGE anbetr
so findet man solche in verschiedenen Stellen seiner Schr
ten, mehr oder minder entwickelt (Arch. der Math. H. V
S. 363 - 369). Die dort (S. 368) nur angegebene nicht aus
führte Bestimmung des allgemeinen Coëfficienten der un
stimmten Potenz des Polynoms, ist combinatorisch
aller Form.

25) Woher es gekommen, dafs JACOB und JOHANN BE
NOULLI, dafs EULER und andere grofse Mathematiker, d
LEIBNITZEN's Schriften gewifs fleifsig gelesen haben, die Vo
theile der combinatorischen Analysis, bey so starken un
nachdrücklichen, nicht selten ekstatischen Empfehlungen un

Lobsprüchen derselben, selbst nach einer von LEIBNITZ ausführlich aufgestellten Probe — der Auflösung eines sehr verwickelten Problems — dennoch übersehen haben; davon habe ich in der Vorrede zu *Infin. Dign.* p. XVIII, XIX, ingl. *Nov. Syst. Combin.* p. XVI. Note (*q*) die Ursache angegeben.

26) LEIBNITZ hat von seiner Rechenmaschine selbst eine kurze Beschreibung und Abbildung (*Opp. T. III. No. LXXIV.* p. 413 — 415. *Fig.* 85; *it.* p. 27, 28) gegeben. Späterhin ist die Maschine von Hannover nach Göttingen geschickt worden (*Ibid Praef. Lud. Dutens* p IV.) KÄSTNER hat sie aber nicht, wie DUTENS daselbst sagt, wieder hergestellt; sie befand sich noch im Jahre 1778 ganz ungangbar auf dem Göttingischen Observatorio, wo ich sie selbst gesehen habe. Hahn's, Müllers und Anderer Rechenmaschinen sind gleichfalls, aus eignen ausführlichen Beschreibungen bekannt. Von LAMBERTS Verdiensten um Factoren- und andere, arithmetische, trigonometrische und analytische Tafeln, zeigen seine Beyträge zum Gebrauch der Mathematik im zweyten und dritten Theile, seine Zusätze zu den trigonometrischen und logarithmischen Tafeln und der 5te Band seines deutschen gelehrten Briefwechsels. Hierher gehört auch meine „Beschreibung — Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen — zu finden, nebst Anwendung der Methode auf verschiedene Zahlen, besonders auf eine darnach zu fertigende Factorentafel — Leipzig, 1776." Wie durch die darinn getroffene Grundlage für Factoren- und andere Tafeln, so wie durch die Bearbeitung derselben, der combinatorische Geist in mir geweckt und der Sinn dafür geschärft worden sey, ist (Arch. der Math. H. II. S. 243 — 247) ausführlich gezeigt worden. Prof. FELKELS zugleich unternommene Bearbeitung einer Factorentafel, veranlafste einen Streit zwischen ihm und mir, der sich aber von selbst legte, da sich fand, dafs zwar Beyder Bearbeitung der Tafel mechanisch, dennoch aber FELKELS rhabdologische Ausführung derselben von meiner combinatorischen ganz verschiedenen sey, letztere auch einen viel grössern Umfang für die Anwendung auf andere Tafeln zeige, als die erstere. Dies ist LAMBERTS Urtheil im 5ten Bande seines Briefwechsels (S. 194, 195) in welchem seine Correspondenz mit mir und FELKEL enthalten ist.

Die grossen Vortheile, welche die in jener Beschreibung gelehrte combinatorisch-mechanische Bearbeitung der in *Extensa* vorgelegten Zahlen gewähren, sind auch nicht unbenuzt ge

blieben. Die Folgen davon sind drey grosse ausführliche T
feln, die bey mir ganz vollendet, im Manuscripte liegen:

1) Eine Factorentafel, in welcher alle Primzahl
und alle einfache Theiler der zusammengesezten, durch 2, 3,
nicht theilbaren Zahlen, von 1 bis Million, ausgesezt befindl
sind. Das sehr günstige Urtheil, das Herr Director Be
NOULLI, der diese Tafeln bey mir in Leipzig schon vor m
reren Jahren ganz vollendet in der Handschrift gesehen h
darüber fällt (LAMB.-Briefw. 5. B. S. 242), gründet sich dar
dafs ich bey dem Vortrage der Zahlen sowohl als ihrer Fac
ren ein ganz neues Zahlensystem (das Centesima
system) befolgt, und das gebräuchliche Dekadische
gleich so innig damit inVerbindung gesezt habe, dafs man
Zeichen der Zahlen und ihrer Factoren auf der Stelle,
ohne ein Blatt umzuschlagen in gewöhnliche dekadische Zif
und Zahlen umsetzen kann. Es ist zu bedauern, dafs die g
sen Kosten des Verlags mehrmalige Hindernisse der Aus
rung in den Weg gelegt, und solche bis itz suspen
haben.

2) Eine Tafel der Quadrat- und Cubikzahle
der Wurzeln von 1 bis Hunderttausend. Den ersten Entwu
dazu hat Herr von SCHÖNBERG gemacht (LAMB. Briefw. B
S. 309) Die Abkürzung des Vortrags ist, ohne Nachtheil
Deutlichkeit, sehr beträchtlich (Daf. B. 5. S. 220).

3) Divisionstafeln, oder Tariffe aller Primzahlen v
1 bis 997. Eigentlich: mechanische Division aus Tarif
der zusammengehörigen, combinatorisch angeordneten, m
lichen Dividenden, Quotienten und Reste dieser Zahlen. V
diesen Tariffen (Das. B. 5) an mehreren Orten. Die bequ
ste Construction derselben (Ebend. S 207 — 211) Von d
fast unglaublichen Wirkungen einer solchen Zusammenst
lung (Das. S. 215 und Arch. der Math. H. VII. S.
Note.)

Das hier Beygebrachte wird hinreichend seyn, den gross
Nutzen combinatorischer Anordnungen und Verfahren, zu m
chanischer Aufsuchung der Zahlen zu bewähren, wodurch si
selbige weit schneller und sichrer finden lassen, als durch k
nen der gewöhnlichen abkürzenden Rechnungsvortheile mö
lich ist.

27) Die *Eliminations des inconnues* gehören gröfstentheils z
den bestimmten, theils zu den unbestimmten, theils z
den mehr als bestimmten Aufgaben (*Problèmes determinés*,

indéterminés, plus que déterminés.) BÜRMANN nennt sie mit Recht *éliminations étendues*; denn von den allgemeinen algebraischen Operationen, die sich combinatorisch erleichtern, oft nur auf diesem Wege darstellen und realisiren lassen, ist wohl keine so weitläuftig und schwierig, als diese, zumal je grösser die Anzahl der unbekannten Grössen und Gleichungen, und von je höherm Grade und mehrern Gliedern diese Gleichungen sind. Verschiedene Methoden und daraus abgeleitete Formeln: von NEWTON (*Arithmet. univ. p.* 57 — 64); von EULER (*Mem. de l' Ac. des Sc. à Berlin, année* 1745. p. 243 — 248) *année* 1764. p. 91 — 104; *Introd. in Anal. Inf. L. II.* p. 263 und p. 265 *seq.*); von LAGRANGE. (*Mem. — Berlin, année* 1769. p. 303 — 318) Übrigens ist das Eliminationsproblem eins von denjenigen, wo man schon vorlängst combinatorische Hülfe gesucht hat. So hat z. B. CRAMER (*Analyse des lignes courbes, Appendice, de l'evanouissement des inconnues p.* 656 *seq.*) gezeigt (Das. *p.* 658) dafs, bey gegebenen einfachen Gleichungen, die Elimination auf den Permutationen der Coefficienten dieser Gleichungen beruhe; auch *p.* 660 — 676) den wichtigen Fall für zwey Grössen x, y und eben so viel Gleichungen von den Graden m, n, eine (z. B. x) zu eliminiren, behandelt, eine combinatorische Formel dafür angegeben, und beyspielsweise auf die Gleichungen $x^3 - 2ax^2 + 4ayx - y^3 = 0$, und $ax^2 + y^2x - ay^2 = 0$) angewendet. Eine verbesserte combinatorische Anordnung der ersten Aufgabe von CRAMER habe ich in meiner Vorrede zu RÜDIGERS *Spec. anal. de lin. curv. sec. ord.* und einen strengen combinatorischen Beweis seines Verfahrens hat Prof. ROTHE (zweyte Samml. c. a. Abh. S. 263 ff.) nebst mehreren andern verwandten Untersuchungen, gegeben. Ein hierher gehöriges Hauptbuch, das aber viel weniger bekannt ist, als es zu seyn verdiente, ist die *Théorie générale des Equations algébriques; par M. Bézout. Paris* 1779. Die Bezoutischen Verfahren sind gröfstentheils (ohne dafs er sie selbst dafür gehalten oder daran gedacht haben mag) combinatorisch, nur in der Ausführung zum Theil sehr weitläuftig und ermüdend; wovon ich hier nur seine *Règle générale pour calculer, toute à la fois, ou séparément, les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré* (p. 172 — 187) als Beyspiel anführen will, wo man mit der Cramerischen oder meiner Vorschrift (a a. O.) vergleichen kann. Es ist daher sehr zu bedauern, dafs dem Verfasser zu der Zeit (1779) meine combinatorischen Operationen, Involutionen und Sätze noch nicht bekannt seyn konnten; we-

durch sein Werk, zum gröfsten Vortheil der Wissensch
an Abkürzung und Deutlichkeit viel gewonnen haben wür
Es würde sehr verdienstlich seyn, wenn ein Analyst die Bezo
schen weitläuftigen Verfahren, Sätze und Regeln in die s
combinatorische Sprache und ihre darstellende Zeich
übersetzen wollte. Ein solches Unternehmen würde, weg
der reichen Ausbeute die es gäbe, den Dank des Publicu
nicht verfehlen.

28) Hierher gehören unter andern die stelegraphis
geordneten, von mir sogenannten cyclischen Periode
und ihr Gebrauch in der Diophantischen oder unbestimm
Analytik (Leipz. Magaz. der Math. Jahrg. 1786. St. 3. S. 281.
eine combinatorische Auflösung der von EULER und LAGRAN
schon behandelten Aufgabe: „alle Gleichungen vom er
Grade, mit zwey oder mehrern unbekannten Grössen, in g
zen Zahlen aufzulösen", (Arch. der Math. H. VI. S. 216).

Eine der wichtigsten und weit sich erstreckende Anw
dung der combinatorischen auf die unbestim
Analysis, beruht auf der Auflösung der unbestimmten G
chungen, wie $p+q+r+s+$ etc. $= m$, oder $\alpha p+\beta$
$+\gamma r+\delta s+$ etc. $= n$, für gegebene m, n, und α,
γ, δ, ε... (jede Gleichung einzeln, für sich, oder auch bey
in Verbindung mit einander) in ganzen und bejahten Zahlen,
o nicht ausgeschlossen. Die erste Gleichung führt und bezie
sich auf Variationsclassen für den Zeiger (0, 1, 2...
die zweyte (für welche α, β, γ, δ . . . gewöhnlich 1,
3, 4 . . . . so, dafs $p+2q+3r+4s$ . . . . $+$ etc. $=$
auf Summen von Combinationsclassen für den Zeig
(0, 1, 2 . . . n); Beyde Gleichungen zusammen, auf ei
bestimmte Combinationsclasse, die beyden Gleichungen G
nüge thut. Einzelne Beyspiele analytischer Aufgaben, mit B
ziehung auf solche Bedingungsgleichungen, haben
MOIVRE, JACOB BERNOULLI, und LAGRANGE gegeben. S
häufig und scharfsinnig findet man sie neuerlich von KRA
(*Anal. des Réfract. astron. p.* 71 — 81, E. S. c. a. A. S. 102 — 117, u
Z. S. c. a. A. S. 341 — 366) bey seinen combinatorisch
Integralen oder Aggregaten, gebraucht und in Verbindu
mit Zahlentäfelchen angewendet, deren Zahlen als z
zusammengehörige Werthe der p, q, r, s . . . am leichtes
auf combinatorischen Wegen sich finden lassen, und eben de

gen eine combinatorische Auflösung geben. Die Auf-
ung solcher unbestimmten Gleichungen, auf dem gewöhnli-
n Wege, würde in grosse Weitläuftigkeit führen (E. S. c. a. A.
119, 120). Bey mir kommen dergleichen Bedingungsgleichun-
gewöhnlich nicht vor, weil ich dafür sogleich das zugehöri-
Zeichen der Involution der mehreren oder einzelnen Classen,
t untergesetztem Zeiger setze, und dadurch die Bedingungen
er unbestimmten Gleichungen im Voraus erfülle.

9. HUYGENS, LEIBNITZENS, JAC. und DAN. BERNOULLI's,
MVRE's, MONMORT's, EULER's, LAGRANGE's, LAPLACE's,
NDORCET's, TETENS und Anderer zahlreiche Schriften, und
n Theil tiefe Forschungen in dem Fache der Wahrscheinlich-
t und deren mannichfaltigste Anwendung auf allerley Ge-
stände der Wissenschaften und Künste, der Gewerbe und
s gemeinen Lebens, sind zu bekannt, als dafs sie erst hier
geführt werden dürften. Hierbey liegt nun gewöhnlich die
nzahl möglicher oder nach gewissen Gesetzen beschränkter
bindungen oder Versetzungen gegebener Dinge zum Grunde.
giebt aber eine Wissenschaft, die weit inniger und natür-
er mit der Combinationslehre in Verbindung steht, als
ine andere; die ausser der Anzahl jener Verbindungen und
etzungen der gegebenen Dinge, noch ganz vorzüglich die
irkliche Darstellung derselben zum Zweck hat, und
on den erheblichsten Nutzen zieht — die ANALYSIS. Pro-
n davon haben vorlängst LEIBNITZ, de MOIVRE, BOSCO-
ICH, CRAMER und BEZOUT gegeben, auch haben insbeson-
re LEIBNITZ und BOSCOWICH, die Vorzüge der combinator-
chen Verfahren laut, und ersterer nicht selten mit unbe-
nzten Lobsprüchen, gerühmt. Gleichwohl scheint dies al-
s für die Wissenschaft verlohren gegangen zu seyn, so lange
e ersten und einfachsten Gründe der Sache noch nicht auf-
funden und zu einem System verarbeitet waren; wodurch
an erst hinterher die Wichtigkeit jener ersten Versuche
d Verfahren gehörig schätzen, und dabey zugleich einen
lernte, wie solche sich noch verbessern, weiter ver-
llkommnen und ganz vollenden lassen. (E. S. c. a. A.
155 — 161).

30) Ein Beyspiel einer ausführlichen combinatorischen Dar-
llung von BERGMANN, die Zahl und Zusammensetzung der
nannten zwey- drey- vier- fünf-fachen (aus den zu sei-
r Zeit allgemein angenommenen fünf einfachen) Erden be-

ressante seyn wird, das über einen so lange und a
tend verfolgten Gegenstand von ihm ist gefunden wo
Da das *Développement général* (ein ausgehobenes Stück
Fragment aus dem BÜRMANNISCHEN *Traité du calcul fonctio*
combinatoire) blos für Nichtanfänger und Kenner geschrieben
bey denen es mehr auf Fülle der Sachen und Gedanken, al
umständliche Auseinandersetzung ankommt, die der Verfa
wo und so weit es nöthig, in seinem gröfsern Werke s
geben wird: so enthalte ich mich aller erläuternden Anmer
gen und Beyspiele. Nur die LEIBNITZISCHEN Coefficien
wie sie BÜRMANN von ihrem Urheber nennt, und ihren
branch bey den combinatorischen Anordnungen (*Dév.*
§. 4, 12, 13) werden einige Bemerkungen nicht überflüssig
chen — selbt für geübte Analysten, denen combinatorische
griffe und Verfahren noch nicht recht geläufig sind.

A) LEIBNITZISCHE Coefficienten und ihre Anwen
(*Dév. gén.* §. 4). BÜRMANN hat sich dieser Coefficienten
nehmlich Zahlen statt der Buchstaben gesezt werden) mit g
eem Vortheil bedient, und so vermittelst der einfachsten
kalzeichen (wie ich sie nenne) die gesuchte Entwickel
der Functionen ungemein erleichtert Der *locus classicus* für
gleichen Bezeichnung ist LEIBNITZENS *Nova Artis An*
cae promotio specimine indicata; dum Designatione per Num
assumtitios loco Literarum, Algebra ex Combinatoria Ar
cem capit (LEIBN. *Opp. T. III.* p. 359 *et* 366, 367). Wer
Opera LEIBN. nicht bey der Hand hat, kann diese merk
dige Stelle in der Vorrede (*p.* XVII) zu meinen *Infin. Di*
nachsehen; wo ich auch (*p.* XV, XVI) das LEIBNIZI
specimen mit aufgeführt habe. Diese Bezeichnung macht
Grundlage zu der LEIBNITZISCHEN *Combinatoria characteri*
von der dieser grosse Mann zwar oft gesprochen (mehrere
len von ihm, über den Nutzen der Combinationslehrer in
Analysis, und für eine allgemeine philosophische Sprache,
hen in meinen *Nov. Syst. Perm. et Comb. Praef. p.* X —
aber nichts davon entwickelt aufgestellt hat. Besonder
hört hierher noch die Stelle (*Opp. T. III.* p. 416 und im
Syst. p. 35, 5) wo gezeigt wird, wie man die Coeffici
mehrerer Reihen deutlich durch Zahlen unterscheiden
kann. Was dort LEIBNITZ beyspielweise für zwey Gl
ungen nachgewiesen, das hat BÜRMANN auf zwey Reihen
cessiver Functionen angewendet, und dabey Functionen der
ler von denen der Nenner durch zwey neben einander ge

…en oder Ziffern (Die ersten für die Zähler, die zweyten für die Nenner) bezeichnet und unterschieden, so, …die Unmöglichkeit, sich kürzer und zugleich deutlicher über auszudrücken unmittelbar dabey einleuchtet.*)

Noch mehr. Das von BÜRMANN (*Dév. gén.* §. 4) angegebene …etz für N, das allgemeine $n$te Glied, ist ganz leicht und …ach. Nur könnte es scheinen, dafs die darinn vorkommenden Buchstaben $a, b, c, d \ldots$, deren Werthe nachher …eln angegeben, und durch eine in die Augen fallende Re…rrenz bestimmt werden, eben deswegen zu Weitläuftigkeiten führten. Aber diese Recurrenz mufs, wie auch BÜRMANN erinnert, mit der in der Analysis sonst gewöhnlichen, so lästigen, nicht verwechselt werden. Sie ist combinatorischer Art (Zw. S. c. a. A, S. 34 und S. 48 — 50) und …sich involutorisch ausführen. Es wird nicht überflüssig …, wie das geschehen könne, hier in der Kürze nachzu…isen. Zu dieser Absicht will ich

I. In dem BÜRMANNISCHEN Ausdrucke für N, statt der dor… Buchstaben $a, b, c, d \ldots$ (nach dem von mir im …chive der Mathem. Heft I. S. 32 — 35 aufgeführten Verfah…) die Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ gebrauchen und so …(*Dév. gén.* a. a. O.)

$$N = 1.o^n + \mathfrak{A}.o^{(n-1)} + \mathfrak{B}.o^{(n-2)} + \text{etc.} + \mathfrak{M}.o^{1}$$

…$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ bezeichnen hier zweyerley; 1) Die …rdnung in der Folge (in II, IV und V) vorkommenden …volutorischen Winkel, und 2) den Inhalt derselben, wie …in den Winkeln eingeschrieben steht; in welchem Falle meine …$\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ mit den BÜRMANNISCHEN $a, b, c, d \ldots$ …ollkommen übereinstimmen.

Die grofsen deutschen Buchstaben, in Beziehung auf die gehörigen Winkel, sind demnach hier eine Art Lokalzeichen, welche andeuten, wo man das was man sucht zu finden …t. Es wird hier *Continens pro Re contenta* genannt. Dieser In-

*) Eine andre Anwendung dieser bey mehrern Reihen so …quemen LEIBNITZISCHEN Beziehung auf das Eliminationsproblem, …t Prof. ROTHE (Zw. S. a. c, A, S. 229 u. f.) gemacht und viel…chen Nutzen daraus gezogen.

halt giebt die combinatorische Anordnun der gröſsten Leichtigkeit, weil bey Construction der tionen (in IV und V) die Winkel sämmtlich g werden.

II. Die regelmässig fortschreitenden Factoren: $0n$, $0(n-2)$ . . . . 02 01 in dem obigen (*I*) Werthe haben keine Schwierigkeit. Den Inhalt der Coef $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ . . . giebt die BÜRMANNISCHE Relation a, b, c, d . . . (*Dév. gén.* §. 4) und so findet den dortigen Gleichungen für a, b, c, d . . . statt chens $-$, vor der *H*and überall das Zeichen $+$ gesezt) halt oder die Werthe von

$$\mathfrak{A} = (n-1)n$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}.(n-2)(n-1) + 1.(n-2)n$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}.(n-3)(n-2) + \mathfrak{A}.(n-3)(n-1) + 1.(n-3)n$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}.(n-4)(n-3) + \mathfrak{B}.(n-4)(n-2) + \mathfrak{A}.(n-4)(n-1) + 1.(n-4)n$$

u. s. w. f.

III. Aus dem Werthe für N in (I) findet man ($n = 1$ 4, 5 6 . . . . . nach und nach gesezt) die ei A, B, C, D, E, F . . . . . (*Dév. gén.* §. 4) na Ordnung:

$$A = 01$$
$$B = 02 + \mathfrak{A}.01$$
$$C = 03 + \mathfrak{A}.02 + \mathfrak{B}.01$$
$$D = 04 + \mathfrak{A}.03 + \mathfrak{B}.02 + \mathfrak{C}.01$$
$$E = 05 + \mathfrak{A}.04 + \mathfrak{B}.03 + \mathfrak{C}.02 + \mathfrak{D}\,01$$
$$F = 06 + \mathfrak{A}.05 + \mathfrak{B}.04 + \mathfrak{C}.03 + \mathfrak{D}.02 + \mathfrak{E}.01$$

etc. etc. etc, etc.

lie Werthe für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ . . . aus (II) sich ergeben
i man auch dort $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ succes-
sezt.

f. Aus (II) kan man nun sogleich, worauf hier alles an-
nt, für N folgende allgemeine Involution mit Win-
a $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}$, etc. und ihren Füllungen (wie
. H. I. S. 35) anordnen:

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	
$(n-1)\,n$ | $(n-2)\,n-1)$	$(n-3)\;(n-2)$	$(n-4)\;(n-3)$		u.
$1^\circ.\;(n-2)\,n$	$(n-3)\;(n-2)$	$(n-4)\;(n-3)$		
$(n-1)\,n\;.$	$(n-3)\;(n-1)$	$(n-4)\;(n-3)$		
$1^\circ.$	$(n-3)\;n$	$(n-4)\;(n-3)$		s.
$(n-1)\,n\;.$	$(n-2)\;(n-1)\;.$	$(n-4)\;(n-2)$		
	$1^\circ.\;(n-2\;n\;.$	$(n-4)\;(n-2)$		w.
	$(n-1)\,n\;.$	$(n-4)\;(n-1)$		
	$1^\circ\;.$	$(n-4)\;n$		f.

u. s. w. f.

1° in den lezten Gliedern der Winkel (hier und in II) ist
Lokalzeichen, sondern die Zahl 1, und kann also als
or weggelassen werden; wie auch in der Folge (in V...)
hehen ist.

V. Die allgemeine Involution (in IV) l
gen der $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$ . . . etwas in
te aus. Für bestimmte Werthe von n z. B. für
oder für den sechsten Buchstaben F, fällt alles zu

	𝔄	𝔅	ℭ	𝔇	𝔈
𝔄	56	45	34	23	12
𝔅	64	34	28	12	
	56	35	23	12	
ℭ	36	23	12		
	56	45	24	12	
	46	24	12		
	56	25	12		
𝔇	26	12			
	56	45	34	13	
	45	34	13		
	56	35	13		
	36	13			
	56	45	14		
	45	14			
	56	15			
𝔈	16				

Nach (II) ist nämlich $\mathfrak{A} = (n-1)\,n$, für das $n$te (
Für das 6te, F, wäre also ($n = 6$ gesezt) $\mathfrak{A} = 56$
Anfang der Involution für die Coefficienten
Gliedes; woraus man die erste Complexion 56. 45. 34.
und alle übrigen, wie die Winkel nachweisen, ohne
rigkeit ableitet (II, IV)

VI. Diese Involution gilt für alle Glieder oder Th
F, wenn man nach einander, was

in den Winkeln 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈 steht

mit den Factoren 05, 04, 03, 02, 01 mul-
tiplicirt, und 06 als Anfangsglied voransezt.

VII. Die Glieder der Werthe von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 . . . ha-
nicht durchgängig das Zeichen + wie man (in II) vor
Hand angenommen hatte. Wegen der Zeichen ist also
merken, daſs jedem Producte in den Winkeln, das aus ei-
geraden Anzahl Factoren besteht, das Zeichen +, aus
er ungeraden Anzahl aber, das Zeichen — vorzusetzen
. Und so ist (III, V)

$$F = 06 - \underline{56}|05 + 56.45|04 - 56.45.34|03 + \text{etc.}$$
$$\underline{- \quad 46}| \quad + \quad 46.34|$$
$$+ \quad 56.35|$$
$$\underline{- \quad 36}|$$

raus erhellet zugleich, woher die verschiedenen Zeichen
den Coefficienten des 9ten Gliedes (*Dév. gén.* §. 4) kommen,
d warum BÜRMANN (etwas weiter vorher) in den Werthen
r B, C, D, E die Zeichen + und — abwechselnd nur im-
r für die ersten Complexionen gesezt hat; weil sich nehm-
ch daraus die für die übrigen, untergesetzten, sogleich
ersehen lassen.

Anmerkung. Ich habe schon anderwärts (Arch. der Ma-
em. H. II. S. 160 — 195) den Reichthum und die groſse
nnichfaltigkeit combinatorischer Gesetze für die Werthe der
tinuirlichen Brüche angeführt. Das überaus leichte Fort-
gsgesetz bey obiger Involution (IV, V), wo Werthe von
rthen abgeleitet werden, ist zum Theil stelegraphisch
140. Note). Ein ganz und durchaus stelegraphi-
hes für dergleichen Brüche hat Prof. ROTHE (a. a. O.
181 — 174) angegeben; ein anderes von BÜRMANN (hier
23) für die hiesige Involution, ist von diesem ganz verschie-
, und dadurch merkwürdig, daſs es zeigt, wie anfangs
nzelne Factoren, dann Factorengruppen von
4. 18, 6 . . . Factoren hinter einander, sich nach be-
immten Intervallen in den auf einander folgenden senk-
hten (stelegraphisch angeordneten) Colonnen wiederholen *)

*) Die stelegraphischen Anordnungen stellen sich zuweilen ganz
erwartet dar. So z. B. Prof. ROTHENS Aufführung der Stellen-

Der Reichthum combinatorischer Veränderungen und Darstellung ist unerschöpflich!

B) Vergleichung der Bürmannischen, und Burkhardtis Hindenburgischen und Töpferischen Zeichen und Zusammenstellung bey Auflösung des Problems (gén. §. 13)

Bey nurgedachtem Probleme

Sommer $\frac{n'}{n-1,+}\ \frac{n-1'}{n-2,+}\ \frac{n-2'}{n-3,+}\ \cdots\ \frac{2'}{1,+}$

kann man fragen, wie die Bürmannische Auflösung mit dort (am Ende von §. 13) angeführten Burckhardtischen Hindenburgischen und der, denselben Zweck mit ihr ve genden, Töpferischen, zusammenhänge, und eine auf die dere sich reduciren lasse?'

I. Burckhardt's Verfahren, die zusammengehörigen Zä und Nenner der successiven Brüche zu finden, steht im A der Mathem. (H. II. S. 174 — 178) und bezieht sich auf continuirlichen Bruch

$$\frac{1}{2+}\ \frac{3}{4+}\ \frac{5}{6+}\ \frac{7}{8+}\ \frac{9}{10+}\ \frac{11}{12+}\ \cdots$$

wo alle Lokalzeichen der Zähler durch ungerade Z len 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . ; alle Lokalzeichen der Ne durch gerade Zahlen, 2, 4, 6, 8, 10, 2 . . . an drückt werden. Beyder Brüche Vergleichung zeigt dafs

Burckh.'s 1 3 5 7 9

Bürm.'s n' $n-1'$ $n-2'$ $n-3'$ $n-4,$

ingleichen

Burckh.'s 2 4 6 8 10

Bürm.'s $n-1,$ $n-2,$ $n-3,$ $n-4$ $n-5,$

mit einander übereinstimmen und für einander gesetzt we können.

exponenten für Permutationen (Zw. S. c. a. A. S. 264) für che die Cykel in den auf einander folgenden verticalen Colonnen selbst in die Augen fallen.

VII. Die Glieder der Werthe von A, B, C, D . . . haben nicht durchgängig das Zeichen + wie man (in II) vor der Hand angenommen hatte. Wegen der Zeichen ist also zu merken, dafs jedem Producte in den Winkeln, das aus einer geraden Anzahl Factoren besteht, das Zeichen +, aus einer ungeraden Anzahl aber, das Zeichen — vorzusetzen ist. Und so ist (III, V)

$$F = 06 - 56|05 + 56.45|04 - 56.45.34|03 + \text{etc.}$$
$$\quad - 46| \quad + 46.34|$$
$$\quad + 56\,35|$$
$$\quad - 36|$$

hieraus erhellet zugleich, woher die verschiedenen Zeichen by den Coefficienten des γten Gliedes (*Dév. gén.* §. 4) kommen, nd warum BÜRMANN (etwas weiter vorher) in den Werthen er B, C, D, E die Zeichen + und — abwechselnd nur immer für die ersten Complexionen gesezt hat; weil sich nehmlich daraus die für die übrigen, untergesetzten, sogleich bersehen lassen.

Anmerkung. Ich habe schon anderwärts (Arch. der Math. H. II. S. 160 — 195) den Reichthum und die grofse Mannichfaltigkeit combinatorischer Gesetze für die Werthe der ontinuirlichen Brüche angeführt. Das überaus leichte Fortngesetz bey obiger Involution (IV, V), wo Werthe von Werthen abgeleitet werden, ist zum Theil stelegraphisch (§. 140. Note). Ein ganz und durchaus stelegraphisches für dergleichen Brüche hat Prof. ROTHE (a. a. O. 181 — 174) angegeben; ein anderes von BÜRMANN (hier 123) für die hiesige Involution, ist von diesem ganz verschieden, und dadurch merkwürdig, dafs es zeigt, wie anfangs einzelne Factoren, dann Factorengruppen von 4. 18. 6 . . . Factoren hinter einander, sich nach bestimmten Intervallen in den auf einander folgenden senkrechten (stelegraphisch angeordneten) Colonnen wiederholen *)

*) Die stelegraphischen Anordnungen stellen sich zuweilen ganz unerwartet dar. So z. B. Prof. ROTHENS Aufführung der Stellen

Zahlen, gleichfalls nach der Ordnung gelesen, neben einand und hintereinander schreiben.

Anmk. 2. Die so geordneten Complexionen, von un herauf gelesen, stimmen mit den Bürmannischen, von ob herunter gelesen, vollkommen überein. Man vergleiche Darstellung (a. a. O. S. 188).

II. HINDENBURGS Verfahren für solche Brüche kommt mehreren Orten des Archivs vor. Hier will ich unter ande die Darstellung (Heft III. S. 334) von Zähler und Nenner führen, die sich auf den Bruch (S. 331)

$$\frac{a}{\alpha+}\ \frac{b}{\beta+}\ \frac{c}{\gamma+}\ \frac{d}{\delta+}\ \frac{e}{\varepsilon+}\ \ldots$$

bezieht, den ich $= z$ setzen, und jeden unbestimmten Werth von ihm *zvn* (*z valor ntus*) nennen und ausdrücken w Hier stimmen also

Hindb.'s.	a	b	c	d	e
Bürm's.	n'	$n-1'$	$n-2'$	$n-3'$	$n-4$

ingleichen

Hindb.'s	α	β	γ	δ	ε
Bürm.'s	$n-1$,	$n-2$,	$n-3$,	$n-4$,	$n-5$,

mit einander überein.

Beyspiel, Aus *z v* 5, dem 5ten Werthe des Bruches z, n der Hindenburgischen Darstellung (a. a. O. S. 334) die B mannische abzuleiten.

Aufl. Man setze das Bürmannische $n = 5$, so beziehe sich auf einander

H—s.	a	b	c	d	e	α	β	γ	δ	
B—s.	$5'$	$4'$	$3'$	$2'$	$1'$	4,	3,	2,	1,	0

und man findet, die Bürmannischen Zeichen statt der Hinde burgischen in die beyden Involutionen (S. 334) für Zähler un Nenner gesezt, mit Beobachtung dessen, was in den beyde vorhergehenden Anmerkungen (S. 161, 162) angeführt worden i den Bruch:

Beyspiel. Die Burckhardtische Darstellung des Zählers *C* (a. a. O. S. 177) in die Bürmannische zu verwandeln, und so eine durch die andere zu pfrüfen.

Aufl. Die höchste in der Burckhardtischen Darstellung *C* vorkommende Zahl ist 16. Man muſs also, um bis auf diese Zahl zu kommen, das Bürmannische $n = 8$ setzen. Es beziehen sich also auf einander

Burckh.'s	1	3	5	7	9	11	13	15
Bürm.'s	$8'$	$7'$	$6'$	$5'$	$4'$	$3'$	$2'$	$1'$

gleichen

Burckh.'s	2	4	6	8	10	12	14	16
Bürm.'s	7,	6	5,	4,	3,	2.	1.	0.

wo man also statt der Burckhardtischen Lokalzeichen im dorigen Zähler *C*, nur die zugehörigen Bürmannischen setzen darf. Eben so verführe man für den Nenner *B* (a. a. O. S. 176).

Dieselbe Burckhardtische Darstellung *C* gilt auch für den Zähler des unmittelbar vorhergehenden Bruchs, den lezten von BÜRMANN (*Dév. gén.* §. 13.) dargestellten *Numérateur*; und so gäbe auch *B* den zulezt dort dargestellten *Denominateur*. Nur müſste man dafür bey BÜRMANN $n = 7$ (wie vorher $n = 8$) setzen, die lezte verticale Columne in der Burckhardtischen Darstellung *C* (für den Zähler) wo 16 darinn vorkommt, abschneiden, und nur diejenigen Complexionen linker Hand des Abschneidestrichs (mit Übergehung der übrigen) beybehalten, von denen 16 ist abgeschnitten worden. Man vergleiche die Darstellung (a. a. O. S. 188). Auf eine ähnliche Art verfährt man mit dem Nenner *B*, um den Bürmannischen ersten *Denominateur* daraus abzuleiten. Der Beweis für die Burckhardtische Darstellung für Zähler und Nenner ist im Archiv nicht angegeben; man findet ihn aber in der Burckhardtischen Schrift: *Methodus combinatorio-analytica, evolvendis fractionum continuarum valoribus maxime idonea. Lipsiæ* 1794.

Anmerk. 1. In den Burckhardtischen Complexionen kommen ungerade und gerade Lokalzeichen unter einander gemengt vor. Nicht so bey BÜRMANN, welcher Zahlen mit dem Striche oben, und Zahlen mit dem Striche unten, jede Art von einander gesondert, neben einander stellt. Dieses zu erhalten, darf man nur bey Burckhardt die geraden Zahlen nach der Ordnung gelesen, neben einander, und die ungeraden

wo in den Zählern, $\mathfrak{a}$ und lauter Cursivzahlen von 1 an der Ordnung; in den Nennern, lauter gewöhnlich gerathende Zahlen von 1 an, als Lokelzeichen vorkommen. der erste Zähler $\mathfrak{a}$ ist anders gezeichnet, weil er das Besondere hat, als *Factor communis* in der Auflösungsformel für zv_n zutreten.

Nach dem lezten Bruche stimmen also

Töpfer's: $\mathfrak{a}$ 1 2 3 4 5 .

Bürm's: n' $n-1'$ $n-2'$ $n-3'$ $n-4'$ $n-5'$.

ingleichen

Töpfers 1 2 3 4 5 6 .

Bürm's $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $n-5$, $n-6$, .

mit einander überein.

1. Beyspiel. Aus zv_6, dem sechsten Werthe des Br z nach der Töpferischen Darstellung, die Bürmannsiche zuleiten.

Die Töpferische Auflösung (a. O. S. 182) giebt;

$$zv_6 = \frac{\mathfrak{a}\left(\begin{array}{lll} 23456 + 234.5 & + & 2.35 \\ 236.4 & & 4.25 \\ 256.3 & & 6.24 \\ 456.2 & & \end{array}\right)}{\begin{array}{lll} 123456 + 1234.5 & + & 12.35 + 135 \\ 1236.4 & & 14.25 \\ 1256.3 & & 16.24 \\ 1456.2 & & 34.15 \\ 3456.1 & & 36.14 \\ & & 56.13 \end{array}}$$

wo ich die Complexionen im Zähler und im Nenner, die TÖPFERN in zwey ganzen Colonnen neben einander stehen in gebrochenen Colonnen unter einander gesetzt habe, wi die Ordnung der Bürmannischen Complexionen erfordert

Diese zu finden, darf man nur $n = 6$, und statt

T—s: 0 1 2 3 4 5 . . .

B—s: 6′ 5′ 4′ 3′ 2′ 1′ . . .

eichen, statt

T—s: 1 2 3 4 5 6 . . .

B—s: 5, 4, 3, 2, 1, 0, . . .

m. Man vergleiche den Bürmannischen Bruch für $zv6$ im ma (S. 46)

. Beispiel. Aus dem Bruche für $zv6$ nach TÖPFER, den st vorhergehenden $zv5$ herzuleiten.

lufl. In dem obigen Bruche für $zv6$ übergehe man alle plexionen; darinn 6 nicht vorkommt; bey denen, worinn rkommt, werfe man die 6 weg) was übrig bleibt, giebt Complexionen für

$$5 = \frac{\left|\begin{array}{l} 2345 + 23.4 + 24 \\ \quad 25.3 \\ \quad 45.2 \end{array}\right|}{\begin{array}{l} 12345 + 123.4 + 1.24 \\ \quad 125.3 \quad 3.14 \\ \quad 145.2 \quad 5.13 \\ \quad 345.1 \end{array}}$$

man hier für

T—s	0	1	2	3	4	‖	1	2	3	4	5
B—s	5′	4′	3′	2′	1′	‖	4,	3,	2,	1,	0,

ommen die Bürmannischen Complexionen für $zv5$ (wie)

e so leichte Umsetzung eines Werthes in den andern, ohne Substitution und Reduction, zeigt schon den grossen Nutz- combinatorischer Anordnungen, der noch mehr einleuch- wenn man sieht, dafs die Töpferische Darstellung der ler und Nenner sich sogar, was man kaum erwartet hätte, Involutionen bringen lasse (Arch. der Math. H. II. S. 189)

Obschon TÖPFER und BÜRMANN sich bey Behandlung d continuirlichen Brüche einerley Zweck vorgesezt hatten (S. 16 so sind doch die Regeln, die sie für die Anordnung der Co plexionen vorschreiben, ganz verschieden. Eben so sind HI DENBURG und BURCKHARDT, in Ansehung der Ableitung folge der Werthe aus den vorhergehenden, von denselben Substitu tionen (Arch. d. Math. S. 174) ausgegangen, sind aber gar bal auf von einander ganz verschiedene Wege gerathen. Ei neue Bestätigung der Mannichfaltigkeit combinatorischer V wickelungen und Gesetze für dieselben Gegenstände!

Möchte das Wenige, was ich auf Veranlassung des vortref chen Bürmannischen *Développement général* von combinatorisch Anordnungen und Involutionen, und von ihrer Anwendu auf Summirung der Folgebrüche hier beygebracht habe, die nigen Analysten, welche diese so wirksamen und vielver genden Hülfsmittel und ihren Gebrauch in der Analysis n nicht genüglich kennen, vermögen, meine ausführlichern A handlungen darüber im ersten Bande des mathematischen A chivs einzusehen! Die hier vorkommenden Involutionen hören zu den einfachsten, und lassen sich in sehr mannich tige Gestalten umwandeln. Am besten ist es, den Anfang co binatorisch-analytischer Untersuchungen von den continuir chen Brüchen zu machen, und von da erst auf das allgem Productenproblem, den Polynomischen Lehrsatz u. s. w. u die Evolution anderer Functionen und Sätze fortzugehen. D gedachten Abhandlungen enthalten eine Menge allgemeinn licher Bemerkungen, die nicht blos auf diese Brüche ein schränkt sind, und ich glaube, durch mehrere Beyspiele, a Erfahrung fest davon überzeugt, mit Wahrheit versichern dürfen, dafs Niemanden das aufmerksame Lesen derselben, u das dadurch veranlafste Nachdenken darüber, gereuen wird.

V.

DER

DERIVATIONS-CALCUL

UND DIE

OMBINATORISCHE ANALYSIS

IN

BEZIEHUNG AUF EINANDER

VON

CARL FRIEDRICH HINDENBURG.

ERSTER ABSCHNITT.

nalytische Derivationen und ihre Verschiedenheit. TAYLOR's Theorem, als Grundlage der Theorie der Functionen und deren Entwickelung in Reihen. ARBOGAST's Derivationen und hevristische Fictionen.

Der Begriff von Derivation ist einer der ausgedehntesten und fruchtbarsten in der Analysis. Man kann zusammengehörige Grössen oder Functionen als von einander abgeleitet betrachten; es sey nun, dafs ein zwischen ihnen bestehendes, allen gemeinschaftliches, Gesetz der Ableitung wirklich dabey zum Grunde liegt, oder dafs sie, bey aller Unabhängigkeit an sich, gleichwohl durch gewisse Operationen so mit einander verbunden sind, dafs es möglich wird,

von einer auf die andere überzugehen, und so ei Grösse oder Function aus der andern zu derivire Ich will jene, Derivationen der ersten; diese, D rivationen der zweyten Art nennen. Das Deriv tionsgesetz, auf welches hierbey alles ankomm wird sich im ersten Falle aus dem bestimmten Verh ten der Grössen unter einander selbst, im zweyt Falle aus der Art der Verbindung herleiten lassen, w che die Grössen bey ihrer Zusammensetzung befolg Vorzüglich wichtig zeigen sich beyderley Derivation bey Evolutionen der Functionen in Reihen, b Transformationen der Functionen oder Reihen gegebene Gestalten, bey Umkehrung und I terpolation der Reihen, bey Summirung d continuirlichen Brüche, u. s. w.

2. LAGRANGE und ARBOGAST haben in dem Fac der analytischen Derivationen viel geleistet. Jener h die *théorie des fonctions et équations derivées* zue recht ins Licht gestellt, und ein neues sehr fruchtl res *Système d'opérations algébriques* daraus abgel tet; dieser hat den Begriff von Derivation weiter v folgt, und einen *Calcul des Dérivations* vornehmli zum Gebrauch für Derivationen der zweyten Art neu lich herausgegeben.[a])

3. Es sey fx eine Function der variabe Grösse x.

I. Aus der Theorie der Reihen ist bekan wenn x in $x+v$ (x und v sind beyde undetern nirte Grössen) also fx in $f(x+v)$ sich verw delt, dafs

$$f(x+v) = fx + pv + qv^2 + rv^3 + \text{etc.}$$

[a]) *Du Calcul des Dérivations; par L. F. A. Arbogast. Strasbo An VIII* (1800).

r, dafs $f(x+v)$ in einer nach v geordneten Reihe
darstellen läfst, in welcher $p, q, r \ldots$ (die Co-
icienten der Potenzen von v) gleichfalls Functionen
r sind.

II. Diese Functionen sind keinesweges von v
ängig, lassen sich aber, jede folgende aus der
rhergehenden, und so sämmtlich aus der ur-
rünglich gegebenen (primitiven) Function fx
riviren. LAGRANGE[b]) hat daher, bey der weitern
twickelung von $f(x+v)$, wo diese Derivationen aus
rlich nachgewiesen werden, sehr schicklich

$$x+v) = fx + \frac{f'x}{1}v^2 + \frac{f''x}{1.2.}v^2 + \frac{f'''x}{1.2.3}v^3 + \text{etc.}$$

ezt. Nämlich, $f'x$ ist hier die erste derivirte
nction von fx, und $f''x$ die erste derivirte von fx,
d $f'''x$ von $f''x$, u. s. w.; sämmtliche Functionen
r befolgen ein gemeinschaftliches Deriva-
ionsgesetz, das man kennt, sobald man weis, wie
x aus fx, die erste derivirte Function aus der pri-
tiven, sich ableiten läfst. Diese Bezeichnung ist
en so bequem, als die Folgen solcher Ableitungen
ichtig sind.[c])

b) *Théorie des fonctions analytiques* p. 14.

c) *La Dérivation successive des fonctions* $f'x$, $f''x$, $f'''x$ ... *qui se déduisent de la fonction proposée* fx — *doit être regardée comme une nouvelle branche de l' Analyse, et elle offre ces deux opérations générales;*

1) *Descendre de la fonction génératrice aux fonctions dérivées.*

2) *Remonter de l' une quelconque des fonctions dérivées, à la fonction génératrice; la première est l' objet du Calcul Differentiel, et la seconde appartient au Calcul Intégral.* LACROIX *Traité du Calcul différentiel* p. 94.

III. Sehr anschaulich ist dieses Gesetz in folgendem analytischen Ausdrucke enthalten:

$$f(x+v)=fx+\frac{df x}{1\,dx}v+\frac{d^2fx}{1.2\,dx^2}v^2+\frac{d^3fx}{1.2.3\,dx^3}v^3+\text{etc.}$$

wo also, für unveränderliche dx, die successiven Differentiale,

$$\frac{df x}{dx}=f'x;\ \frac{df'x}{dx}=f''x=\frac{d^2fx}{dx^2};\ \frac{df''x}{dx}=f'''x$$

$$=\frac{d^3fx}{dx^3};$$ u. s. w. ein leichtes Gesetz für Derivationen der ersten Art darstellen.

Für $fx=y$; $f(x+v)=Y$, wäre $f(x+v)$ od

$$Y=y+\frac{du}{1dx}v+\frac{d^2y}{1.2\,dx^2}v^2+\frac{d^3y}{1.2\,3\,dx^3}v^3+\text{etc.}$$

Diese Formeln stellen TAYLO'RS bekanntes Theorem[d]) dar, in der Form, in welcher es gewöhnlich angegeben wird.

IV. Man kann diese Formel etwas abändern und ihr eine für die Entwickelung der Functionen in Reihen bequemere Einrichtung geben[e]). Weil nämlich die veränderliche Grösse x in fx, oder y, alle Werthe annehmen, und man für v auch eine veränderliche Grösse setzen darf (*Eul. Inst. Calc. Diff. II.* §. 66), so kann man erst $x=0$ und dann $v=x$ setzen, und die Function $f(x+v)$ und ihren Werth darnach abändern.

Für $x=0$ verwandelt sich $f(x+v)$ in

$$fv=(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{v}{1}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{v^2}{1.2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{v^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

[d]) Von TAYLOR's Satze, seinen verschiednen Formen und Anwendungen, habe ich (Archiv der Math. H. II. S. 201—2 ausführlich gehandelt.

[e]) Arch. der Math. a. a. O. S. 210, 211.

o man die (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ u. s. w. so
hmen mufs, wie es die Voraussetzung von $x = 0$ er
dert. Man darf nämlich nur

für die klammerirten $(y), \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \ldots$

die reducirten Werthe von $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$

tzen, welche kommen, wenn man in y (der Func-
on von x) und in dem was man daraus durch fortge-
tes Differenziiren findet, nach geschehener Differen-
tion; $x = 0$ sezt. Sezt man zulezt x für v, so er-
lt man y oder

$$y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

n die Klammern dieselbe Nachweisung geben, wie
rthin.

V. Weil die (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ . . .
chts von x enthalten (IV) so kann man dafür auch
, B, C, D . . . , folglich fx oder

$$y = A + Bx + \frac{C}{1.2}x^2 + \frac{D}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

tzen, wobey man, wie eben itzt gezeigt worden, be-
chtiget ist anzunehmen, dafs A durch (y) gegeben
y, und dafs B von A, und C von B, und D von C,
. s. w. sämmtlich nach einem und demselben Gesetze
riviren, und Derivationen der ersten Art darstellen.

So setzt auch Professor ARBOGAST[f]) in der entwik-
elten Function $F(\alpha + x) = a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \text{etc.}$

[f]) *Calcul des Dérivations.* §. I. no. 1.

die Abhängigkeit der a, b, c, d . . . von Fa, a, c . . . als bekannt voraus. Da der Satz dem ganz Gebäude zum Grunde liegt, so wird man die kur derivative Deduction desselben hier nicht überflüss finden.

4. Das Theorem (3, V) sezt voraus, dafs die Fu tion y, auf die man es anwenden will, in eine Rei wie $a + bx + cx^2 + dx^3 +$ etc., wo die Exponent von x in einer arithmetischen Progression fortgehe sich mufs können entwickeln lassen. Da der Umfa solcher Functionen sehr grofs ist, so erhellet dara zugleich die Wichtigkeit des Satzes. Die Entwickelu von $\varphi(x+z)$, der Function eines Binomiums, h also keine Schwierigkeit. Anders verhält es sic wenn man die Evolution von $\varphi(x+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3$ etc.), der Function einer polynomischen Grösse, v sucht; wo die Glieder der Potenzen eines Pol nömiums (für welche die bekannte recurrirende F mel [hier, Note g] in unübersehliche Weitläuftig ten führt) sich nicht leicht übersehen lassen. D combinatorische Analysis hat diese Schwierigkeit au gründlich gehoben.

5. Als Beyspiele zu unmittelbarer Vergle chung mögen die Evolutionen der beyden Functione (Arch. der Math. H. II. S. 211, 212) mit den dortig beyden Anmerkungen (S. 212 — 214) dienen.

Bey der Entwickelung nämlich von

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}x^2 + \text{etc.}$$

zeigt sich in den Gliedern der Reihe, ausser dem r gelmäfsigen Fortschreiten der Binomialcoefficienten, au eine sehr regelmäfsige Verbindung der Potenzen von mit denen von x; jedes folgende Glied ist ein der virtes der ersten Art aus dem nächstvorherge

enden, wobey das allen gemeinschaftliche Derivationsgesetz ganz offen vor Augen liegt; das auch die bekannte Formel

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1} A\frac{x}{a} + \frac{m-1}{2} B\frac{x}{a} + \frac{m-2}{3} C\frac{x}{a} + \text{etc.}$$

nachweist, wo jeder grosse Buchstabe das nächstvorhergehende ganze Glied bedeutet.

Bey Entwickelung hingegen von

$$(a+bx+cx^2+\text{etc.})^m = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

wo $A = a^m$

$B = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} b$

$C = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} c + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2} b^2$

$D = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} d + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}.2bc + {}^m\mathfrak{C} a^{m-3} b^3$

$E = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} e + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}(2bd+c^2) + {}^m\mathfrak{C} a^{m-3}.3b^2 c$
$\quad + {}^m\mathfrak{D}\, a^{m-4}.b^4$

(mehrere Coefficienten, bis mit *I*, stehen in der ersten Samml. c. s. Abh. S. 70)

Bey diesen Entwikkelungen folgen zwar die Binomialcoefficienten ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C}$, ${}^m\mathfrak{D}$ . . . in den einzelnen *A*, *B*, *C*, *D*, *E* . . . wiederum sehr regelmässig auf einander, aber dagegen wächst die Verwickelung der *a*, *b*, *c*, *d*, *e* . . . immer mehr und mehr, je weiter man die Function evolvirt. Dabey ist folgendes klar: 1) die *a*, *b*, *c*, *d* . . . verwickeln sich in den *A*, *B*, *C*, *D* . . . nur nach und nach; *A* ist eine Function von *a*; *B* von *a*, *b*; *C* von *a*, *b*, *c*; *D* von *a*, *b*, *c*, *d*; u. s. w. bey den folgenden Coefficienten. 2) Von jedem dieser Coefficienten ist das erste Glied bestimmt gegeben. Beydes kann man als eine Weisung ansehen, die Zusammensetzung der *a*, *b*, *c*, *d* . . . (in 1 oder 2) genauer zu erforschen und zu sehen, ob und wie, die Coefficienten (in 1) oder die einzelnen Glieder derselben (in 2) als Derivationen der zweiten Art sich

von einander ableiten lassen[8]). Diese Untersuchu
hat mich, wie bekannt, auf combinatorische A
ordnungen geleitet; Prof. ARBOGAST hat sich neu
lich den Weg dazu durch seinen Derivationsc
cul gebahnt.

6. Über die Schwierigkeit der Entwickelung v
$\varphi(a + bx + cx^2 +$ etc.) dahin das zweyte Beysp
(in 5) gehört, hat man schon öfter und vorlängst
klagt, und solche auf mehrern, (in meinen *In*
Dign. (§. *XIII* — *XIX*) zum Theil angegebenen) W
gen, aber immer nicht befriedigend, zu heben gesuc
Herr Prof. ARBOGAST drückt sich (*Préf. p II*) darü
folgendergestalt aus: „Da der Differenzialcalcul m
so grosser Leichtigkeit die Reihenentwickelung
Functionen von Binomien giebt, so ist es
türlich, eine Methode zu wünschen, nach welcher
Entwickelung mit gleicher Leichtigkeit auf Funct
onen der Polynomien von unbestimmter Anz
von Gliedern, sich erstrecken lasse" — Dies habe ih
sezt er hinzu, auf ein allgemeines Evolutio
verfahren durch Derivationen geleitet. AR
GAST ist also, wie man hier sieht, von demselben B
dürfnisse ausgegangen, das auch mich in Thätigk

8) Jedoch so, dafs die A, B, C, D . . . unmittelb
durch a, b, c, d . . . bestimmt und ausgedrückt werden. De
sonst stellen die recurrirenden Formen, wie hier in dies
Falle die Werthe von

$$A = a^m;\ B = \frac{mAb}{a};\ C = \frac{(m-1)Bb + 2mA}{2a}$$

$$D = \frac{(m-2)Cb + (2m-1)Bc + 3mAd}{3a};$$

$$E = \frac{(m-3)Db + (2m-2)Cc + (3m-1)Bd + 4mA}{4a}$$

...zt hat.[h]) Wir haben beyde den Binomialsatz, ...den Newtonischen, ARBOGAST den Taylori...en, zum Grund gelegt; und die Folge wird zeigen, ...wir nicht sowohl in den Mitteln selbst, als in der Art ...aufzufinden und anzuwenden, von einander abwei...n. Meine combinatorischen Deductionen und Invo-

(Eul. *Instit. Calc. Diff. P. II. s.* 202) ebenfalls Derivationen ..., die auch leichte Gesetze befolgen, aber beschwerliche ...titutionen und Reductionen veranlassen; um so mehr, je ...ter man bey ihnen vorwärts recurriren muſs, um alles in ...gegebenen *a, b: c, d* . . . auszudrücken. Von solchen De...tionen, die man recurrirende nennen könnte, ist hier ...Rede nicht. Die Combinationslehre, und so auch der De...tionscalcul, geben Mittel an die Hand, aus einem der bey...ey Ausdrücke in den andern überzugehen. Eine verglei...de Darstellung Beyder, für den obigen Fall, in combina...schen Zeichen ausgedrückt, (Erst. Samml. c. a. A. S. 291) ...andere Darstellung eines verwandten Falls (Zw. Samml. ...A. S. 49) und meine dortigen Bemerkungen (S. 48 — 52) ...gemeine oder gewöhnliche und combinato...ch-involutorische Recurrenzen. Häufige Beyspiele ...solchen Übergangs aus den directen independenten Formen ...die recurrirenden, bey ARBOGAST (*n.* 13, 15, 17, 18, 71 etc.)

h) *Propositum erat primo loco, cum vidissem, Theorema Bi...miale a Viris doctis excultum esse sic, vt, quod posset ad vlteriorem ...fectionem accedere, nihil superesset, propositum, inquam, erat, Theo...mati Infinitinomiali, quod pluribus etiamnum premi com...ram, difficultatibus, eandem operam nauare; si forte possem rem ...deducere, vt, pro rei nimirum ipsius modo atque natura, pari ...ilitate queant, ac fit in Binomio, Infinitinomii etiam Digni...m singula membra exhiberi* (*Infin. Dign. Praef. p.* VII) — *In quo ...nt in modum me adiuuit, a* LEIBNITIO *et Jac.* BERNOULLIO *obseruatus Potestatum Multinomiorum συμβολισμὸς cum rerum ...libet datarum Complexionibus et Variationibus — Terminorum au... quaerendorum reperi pendere inuentionem a Problemate com...atorio, cuius, propter summum in re Combinatoria et Analysi vsum, ...vberiorem institui tractationem* (*Ibid p.* XI.)

von einander ableiten lassen[g]). [illegible]
hat mich, wie bekannt, auf com[illegible]
ordnungen geleitet; Prof. ARBO[illegible]
lich den Weg dazu durch seiner[illegible]
cul gebahnt.

6. Über die Schwierigkei[illegible]
$\varphi(a + bx + cx^2 +$ etc.) [illegible]
(in 5) gehört, hat man sc[illegible]
klagt, und solche auf
Dign. (§. *XIII — XIX*
gen, aber immer nich[illegible]
Herr Prof. ARBOGAS[illegible] ..en
folgendergestalt a[illegible] anlassung
so grosser Leic[illegible] st hat alles auf
Functioner[illegible] n gegründet. Ihn
türlich, eine[illegible] en Art auf Derivation
Entwickelu[illegible] nd ihm Veranlassung gegeben
onen d[illegible] erfahren bey jenen, ein ähnliche
von Gli[illegible]ten, und einen Algorithmen
sezt er [illegible]en. Der Erfolg davon ist eine erweitert
verf[illegible]ng des Differentialcalculs gewesen. Dies
GAR[illegible] schon hinreichend seyn, sich einen Begri
d[illegible] dem Umfange der Methode[i]) im Voraus zu m

i) Erstreckt hat die Methode ihr Urheber vorizt: [illegible]
Entwickelung von Functionen einfacher und
mengesezter Polynomien, bey denen nehmlich die Glied
den Potenzen eines einzigen Buchstabens, oder na
Potenzen und Producten von zwey oder drey Buch
geordnet sind, und die man daher einfache, dopp
dreyfache Reihen oder Polynomien nennen kann; [illegible]
Substitution der Reihen in Reihen; auf das allgem
Glied der recurrirenden (einfachen und doppelten) R
auf die allgemeine Umkehrung der Functione
Reihen: auf den Differenzialcalcul, verwickelt
rationen zu erleichtern, und auf mehrere andere Gegenstän

Theorie der Functionen, von
idem Zweig ausmacht, in der eng-
rbindung steht; ein Umstand, der
sie den Analysten empfehlungs-
Werk ist übrigens mit der
gefafst, und enthält zahl-
it, wo der Verfasser im
öfst, die schon von

ine Lehrsätze der di
ethode der Differen-
auf Zerlegung in Facto-
sformation, Interpolation
h wichtig ist immer die Evolution
Sie macht gleichsam die Grund-
us; die Entstehung (der Ursprung)
vationen zeigt sich hier am deutlich-
finden daher durchgängig ihre An-
i der Folge häufig vor. An ihr kann
wesentliche Verschiedenheit beyder
atorischen und derivativen)
e mit mehrerm zeigen wird.

t sich hier, gleich beym Eintritte, auf
nten Boden (des Differenziirens) und
sich ihm allmälig, bey weitern Fort-
ssichten. Bey einem flüchtigen Über-
e nur wenige Zeichen ins Gedächtnifs
hen sind freylich nur wenige; aber
iche, Puncte, Commata, Zahlen
ärts und niederwärts zur Seite,
cirt, und erhalten dadurch so
fs man sie wohl für eben so viel ein-
nsehen kann. Um so nothwendiger
sammenstellung und die Nachwei-
in einer besondern Tafel, gleich am
ben worden ist.

LAGRANGE und LAPLACE auf andern, zum Theil ähnlichen, Wegen sind aufgefunden worden. [1])

Die grosse Deutlichkeit des Werks beruhet: auf der sehr faſslichen, zum Theil ausführlichen, Darstellung und Auseinandersetzung der ersten Gründe und der daraus abgeleiteten Vorschriften und Verfahren; auf der sehr zweckmässigen Ordnung und Stellung der Sätze vornehmlich auf der genau bestimmten Angabe und Abfassung der vorzüglichsten Aufgaben und Lehrsätze [als Exempel will ich hier die in der Folge vorkommende Aufgabe (in 20) anführen] mit Beyfügung der zugehörigen Auflösungen, Beweise und erläuternden Beyspiele; auf den gut gewählten Abschnitten endlich und Rubriken, die als bequeme Ruheplätze und weitere Nachweisungen dienen. Dieser gemischte, synthetisch-analytische Vortrag, ist freylich nicht so kurz als der ganz analytische, hat aber seine eigenen Vorzüge, die wohl erwogen zu werden verdienen, zumal da der Verfasser nicht blos für vollendete Analysten geschrieben hat.

8. Der Derivationscalcul gründet sich auf die allgemeine Vorstellung, dafs man Grössen als von einander abgeleitet betrachten kann. Hierher gehören (und das ist der gewöhnliche Fall) diejenigen Grössen oder Functionen, die eine solche Abhängigkeit von einander haben, dafs eine aus der andern, durch ein gleichförmiges Verfahren (wie bey den successiven Differenzialen) sich deriviren läfst. Man kann aber, mit ARBOGAST, den Begriff von Derivation erweitern, und

[1]) *En rapprochant plusieurs théories importantes et des solutions fondées sur des principes et des méthodes diverses, j'ai été surtout jaloux, pour mieux faire sentir l'utilité du calcul des dérivations, d'attacher à ce calcul plusieurs des plus elegantes formules dues à la sagacité des grands Geomètres,* LAGRANGE *et* LAPLACE. *Calc. des Dér. Préf. p.* XI.

durch eine hevristische Fiction, auf jede willkührliche, von einander ganz unabhängige Grössen a, b, c, d . . . und ihre Zusammensetzung in Functionen, erstrecken, und solche als veränderlich und von einander abhängig (derivirend) ansehen, wenn sich aus der Verbindung, in welche sie durch die sie betreffenden Operationen gebracht worden, ein Weg angeben läfst, auf welchem man von einer Grösse oder Function auf die andere übergehen kann; wobey also, weniger die Grössen selbst, als ihre Operationen, in Betrachtung kommen.[m])

Ich werde hier und in der Folge nur einige der wichtigsten Derivationsformeln und ihren Gebrauch bey Entwickelung der Functionen von Polynomien in Reihen aufführen, um solche nachher mit den combinatorischen Evolutionsformeln und ihrer Anwendung zu vergleichen. Die Ableitung und Rechtfertigung jener Formeln (wo selbst die Coefficienten a, b, c . . . α, β, γ . . . A, B, C . . . der Glieder der Polynomien durch eine doppelte Fiction als veränderlich und von einander derivirend betrachtet werden, selbst dann, wenn sie gänzlich von einander unabhängig sind, [Anl. p. 6, 4 und p. 20, 21] welcher Voraussetzung am Ende durch eine schickliche Substitution Genüge geleistet wird [Ebend. no. 6] mufs man im Buche selbst nachsehen, wo man alles deutlich und ausführlich aus einander gezt finden wird. Die in der Folge vorkommenden Citate, theils aus der gegenwärtigen Abhandlung, theils aus dem Arbogastischen Werke, kurz und auszeichend zu unterscheiden, sollen die Zahlen der Abschnit-

m) *Les dérivées que je considère sont moins des dérivées de quantés que de dérivées d'opérations, comme l'Algèbre est moins un cul de quantités que d'opérations, arithmétiques ou géométriques, à écuter sur les quantités. Calc. des Dér. Préf. p. I.*

te oder Seiten der erstern, immer in runde ( ); d Numern und Zahlen der Seiten von leztern hin gen, in eckigte [ ] Klammern eingeschlossen werd Auch sollen meine häufig angeführten, erste u zweyte Sammlung combinatorisch-ana tischer Abhandlungen forthin blos durch Sml und Sml. II bezeichnet werden.

10. Der Anfang wird mit dem Satze gemacht

$$F(\alpha+x)=a+bx+\frac{c}{1.2}x^2+\frac{d}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

wo aus der Theorie der Functionen bekannt ist (3. dafs $a=F\alpha$, dafs b von a oder $F\alpha$, und c von und d von c, u. s w. nach einem und demselben G setze deriviren, so, dafs wenn man b von a od $F\alpha$ abzuleiten weifs, man auch c von b, und d vo u. s. w. deriviren kann [no. 1]

11. Das Zeichen der Derivation ist der Buc stabe D, aus dem grössern lateinischen Alphabete d sogenannten Capitälchen. Es ist nöthig die De vationen und Differentiationen (wofür LEIBNITZ d kleinere d gewählt hat) zu unterscheiden. D drückt so zugleich die Verwandschaft und den Unterschied n und von d sehr schicklich aus.

12. Zeigt also D die Operation an, die man $F\alpha$ anwenden mufs, um b daraus zu deriviren, so klar, dafs

$$b=\text{D}F\alpha;\ c=\text{D D}F\alpha=\text{D}^2F\alpha;\ d=\text{D}^3F\alpha;\ \text{e}$$

Man kann also die vorige Reihe (10) auch so a drücken:

$$F(\alpha+x)=F\alpha+\frac{\text{D}F\alpha}{1}x+\frac{\text{D}^2F\alpha}{1.2}x^2+\frac{\text{D}^3F\alpha}{1.2.3.}x^3+\text{e}$$

[no. 2] welche Form mit der des Taylorischen Th rems (3. III) übereinstimmt.

13. Wenn man α als veränderlich betrachtet und differentiirt, so findet man

$$\mathrm{D}F\alpha = \frac{dF\alpha}{d\alpha};\ \mathrm{D}^2F\alpha = \frac{d^2F\alpha}{d\alpha^2};\ \mathrm{D}^3F\alpha = \frac{d^3F\alpha}{d\alpha^3};\ \text{etc.}$$

wo $d\alpha$ constant und willkührlich ist. Man kann also $d\alpha = 1$ setzen, und diese Voraussezung giebt

$$\mathrm{D}F\alpha = dF\alpha;\ \mathrm{D}^2F\alpha = d^2F\alpha;\ \mathrm{D}^3Fa = d^3Fa;\ \text{etc.}$$

und die Regeln der Derivationen sind mit denen der Differentiationen übereinstimmend [3]. Hier bedeuten D, D^2, D^3, . . . dieselben, aber mehrmals und zwar so oft wiederholten Operationen an, als die Exponenten 1, 2, 3 . . . erfordern.

14. Um $\mathrm{F}(\alpha+\beta x)$ zu entwickeln, darf man (in 12) statt x nur βx schreiben. Das giebt, wenn man die β^1, β^2, β^3 . . . von den x^1, x^2, x^3 . . . absondert und neben $\mathrm{F}\alpha$ sezt:

$$\mathrm{F}(\alpha+\beta x) = \mathrm{F}\alpha + \frac{\mathrm{D}\,\mathrm{F}\alpha.\beta}{1}x + \frac{\mathrm{D}^2\mathrm{F}\alpha.\beta^2}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

für $\mathrm{D}\alpha = d\alpha = 1$.

Die β^1, β^2, β^3 . . . zugleich mit von den Operationen auf $\mathrm{F}\alpha$ abhängig zu machen, nehme man an

$$\mathrm{F}(\alpha+\beta x) = \mathrm{F}\alpha + \frac{\mathrm{D}.\mathrm{F}\alpha}{1}x + \frac{\mathrm{D}^2.\mathrm{F}\alpha}{1.2.}x^2 + \text{etc.}$$

Die Vergleichung beyder Reihen giebt sodann die Werthe der Derivationen mit dem Puncte vor $\mathrm{F}\alpha$ oder

$$\mathrm{D}.\mathrm{F}\alpha = \mathrm{D}\,\mathrm{F}\alpha.\beta^1;\ \mathrm{D}^2.\mathrm{F}\alpha = \mathrm{D}^2\mathrm{F}\alpha.\beta^2;$$
$$\mathrm{D}^3.\mathrm{F}\alpha = \mathrm{D}^3\mathrm{F}\alpha.\beta^3;\ \mathrm{D}^4.\mathrm{F}\alpha = \mathrm{D}^4\mathrm{F}\alpha.\beta^4;$$

u. s. w. und diese Werthe findet man auch, wenn man auf $\mathrm{D}.\mathrm{F}\alpha. = \mathrm{D}.\alpha$ dieselbe Operation, wie auf $\mathrm{F}\alpha$, anwendet; und statt $\mathrm{D}.\alpha$ die constante β (also $\mathrm{D}^2.\alpha$; $\mathrm{D}^3.\alpha$

u. s. w. = o) sezt. Dieses, und die Fortsetzung di Verfahrens, giebt

$$D.F\alpha = D\,F\alpha.\ D.\alpha = DF\alpha.\beta^1$$

$$D^2.F\alpha = D.\ (D\,F\alpha.\ D.\alpha) = D^2F\alpha.(D.\alpha)^2 = D^2F$$

$$D^3.F\alpha = D.\ [D^2F\alpha.(D.\alpha)^2] = D^3F\alpha.(D.\alpha)^3 = D^3F$$

u. s. w. Dies Verfahren ist also von dem in der D renzialrechnung gewöhnlichen, nur darinn unters den, dafs hier α variabel und statt $D.\alpha$ der Coeffi gesezt wird, der in dem Binomium $\alpha+\beta x$ zu x ge [no. 3, 4]

15. Den Übergang aus den Functionen der Bi mien in die der Polynomien anlangend, ne man von jedem Gliede der Reihe (14) die Functio dies giebt einestheils,

$$\varphi F(\alpha+\beta x) = \varphi(F\alpha + \frac{D.F\alpha}{1}x + \frac{D^2.F\alpha}{1.2}x^2 +$$

anderntheils, φF statt F gesezt,

$$\varphi F(\alpha+\beta x) = \varphi F\alpha + \frac{D.\varphi F\alpha}{1}x + \frac{D^2\,\varphi F\alpha}{1.2}x^2 +$$

Nun sey $F\alpha = a$, $D.F\alpha = D.a$, $D^2.F\alpha = 1$ u. s. w. so ist

$$\varphi(a + \frac{D.a}{1}x + \frac{D^2.a}{1.2}x^2 + \frac{D^3.a}{1.2.3}x^3 + \text{etc.})$$

$$=$$

$$\varphi a + \frac{D.\varphi a}{1}x + \frac{D.^2\varphi a}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi a}{1.2.3}x^3 + \text{etc}$$

wo also die Entwickelung von $D.\varphi a$, $D^2.\varphi a$, $D^3\varphi$. su suchen ist. Da hier, wie man sogleich übers die $D^2.a$. $D^3.a$, $D^4.a$, . . . nicht (wie in 14) gl Null sind, so sind auch die $D^2.\varphi a$, $D^3.\varphi a$, . . . mehr den $D^2\varphi a\,(D.a)^2$, $D^3\varphi a\,(D.a)^3$, . . . gl sondern man mufs ihnen die von den variabeln $D^2.a$, $D^3.a$, . . . herrührenden Grössen beyfügen;

befolgen hier die Zeichen D und d (11) dieselben Regeln [no. 5.].

16. In der Folge kommen häufig, was ich hier im Voraus bemerken will, neben den ganz einfachen *dérivées successives*, nämlich

den $\mathrm{D}.Fa$, D^2Fa, D^3Fa . . . . D^nFa

auch $\mathrm{D}.Fa$, $\mathrm{D}^2.Fa$, $\mathrm{D}^3.Fa$ . . . . $\mathrm{D}^n.Fa$,

oder $\mathrm{D}.\varphi a$, $\mathrm{D}^2.\varphi a$, $\mathrm{D}^3.\varphi a$ . . . . $\mathrm{D}^n.\varphi a$

wo also Derivationen mit einem Puncte vor den Functionalzeichen F oder φ, von denen ohne Punct zu unterscheiden sind. In beyden wird a als variabel betrachtet; aber in dem Falle wo kein Punct vor F oder φ steht, ist die *dérivée* der veränderlichen a, d. i. $\mathrm{D}a$, beständig und $= 1$, also $a = \mathrm{D}^3a = \mathrm{D}^4a =$ etc. $= 0$; wo hingegen ein Punct steht, ist auch die *dérivée* von a, das ist $\mathrm{D}.a$, und so auch $\mathrm{D}^2.a$; $\mathrm{D}^3.a$; $\mathrm{D}^4.a$ . . . variabel.

Denselben Unterschied (mit oder ohne Punct) werde ich in der Folge auch bey dem gewöhnlichen Differenzialzeichen beobachten, und $d\varphi a$, $d^2\varphi a$, $d^3\varphi a$, . . . für *beständige* $\mathrm{d}a$, von $d.\varphi a$, $d^2.\varphi a$, $d^3.\varphi a$ . . . wo auch die $d.a$, $d^2.a$, $d^3.a$, . . . variabel sind, unterscheiden.

17. Die Entwickelung der successiven Differenzialien $\mathrm{D}\varphi a$, $\mathrm{D}^2\varphi a$, $\mathrm{D}^3\varphi a$, . . . wo $\mathrm{D}a = 1$, also höhere Differenziale von a gar nicht vorkommen, hat keine Schwierigkeit. Aber die Entwickelung für $\mathrm{D}.\varphi a$, $\mathrm{D}^2.\varphi a$, $\mathrm{D}^3.\varphi a$ . . . (15) wo $\mathrm{D}.a$ und alle höhere Differenziale von a beybehalten werden, führt gar bald zu Weitläuftigkeiten.

So ist z. B.

$$\mathrm{D}.\,\varphi a = \mathrm{D}\varphi a \,.\, \mathrm{D}.a$$

$$\mathrm{D}.^2\varphi a = \mathrm{D}.(\mathrm{D}.\varphi a) = \mathrm{D}.\,(\mathrm{D}\varphi a \,.\, \mathrm{D}.a)$$
$$= \mathrm{D}\varphi a \,.\, \mathrm{D}.(\mathrm{D}.a) + \mathrm{D}.(\mathrm{D}\varphi a) \,.\, \mathrm{D}.a$$
$$= \mathrm{D}\varphi a \,.\, \mathrm{D}^2.a \quad + \mathrm{D}^2\varphi a\,(\mathrm{D}.a)^2$$

$$\mathrm{D}^3.\,\varphi a = \mathrm{D}.(\mathrm{D}^2.\varphi a)$$
$$= \mathrm{D}.[\mathrm{D}\varphi a \,.\, \mathrm{D}^2.a + \mathrm{D}^2\varphi a\,(\mathrm{D}.a)^2]$$
$$= \mathrm{D}\varphi a \,.\, \mathrm{D}^3.a + \mathrm{D}^2\varphi a \,.\, \mathrm{D}.a \,.\, \mathrm{D}^2.a$$
$$= \mathrm{D}\varphi a \,.\, \mathrm{D}^3.a + \mathrm{D}^2\varphi a \,.\, \mathrm{D}.a\,\mathrm{D}.^2 a,$$
$$+ \mathrm{D}^2\varphi a \,.\, 2\,\mathrm{D}.a \,.\, \mathrm{D}^2.a + \mathrm{D}^3\varphi a \,.\, (\mathrm{D}.a$$
$$= \mathrm{D}\varphi a \,.\, \mathrm{D}^3.a + 3\mathrm{D}^2\varphi a \,.\, \mathrm{D}.a \,.\, \mathrm{D}^2.a + \mathrm{D}^3\varphi$$
$$(\mathrm{D}.a)^3$$

Diesen, von ARBOGAST [no. 5] aufgeführten W
then von $\mathrm{D}.\varphi a$, $\mathrm{D}^2.\varphi a$, $\mathrm{D}^3.\varphi a$, will ich noch den
$\mathrm{D}^4.\varphi a$, aber, zu Vermeidung der Weitläuftigkeiten,
der lezten reducirten Gestalt, ohne die Z
schenoperationen, hier beyfügen:

$$\mathrm{D}^4.\varphi a = \mathrm{D}\varphi a \,.\, \mathrm{D}^4.a + \mathrm{D}^2\varphi a\,[4\,\mathrm{D}.a \,.\, \mathrm{D}^3.a + 3\,(\mathrm{D}^2.$$
$$+ \mathrm{D}^3\varphi a.\,6.\,(\mathrm{D}.a)^2.\,\mathrm{D}^2.a + \mathrm{D}^4\varphi a.\,(\mathrm{D}.a)^4$$

Der weitere Fortgang hat keinen Anstofs, wenn
die Weitläuftigkeiten nicht rechnen will, welche
mehreren Differenziationen und Reductionen veran
sen, die sich merklich anhäufen, und die Entwi
lung der Derivationen für spätere Glieder in der F
so gut als unmöglich machen.[n]) Auf diesem Wege

[n]) So z. B. kommen auf dem Wege der successiven D
renziation, in dem Werthe von $\mathrm{D}^4.\varphi a$ die zu $\mathrm{D}^2.\varphi a$
$\mathrm{D}^3\varphi a$ zugehörigen Factoren (oder höhere Differenziale
a) nicht, wie hier beysammen vor, sondern müssen erst
streut zusammengelesen werden. Diese Reduction wird in
häufiger und lästiger, je grösser für die Derivation $\mathrm{D}^n.\varphi$
Werth von n ist.

is zusammengesetzte $D^n . \varphi a$ in die viel einfachern φa, $D^2 \varphi a$, $D^3 \varphi a$ . . . $D^n \varphi a$ und in $D.a$, $D^2.a$ $^3.a$ . . . $D^n.a$ mit ihren Potenzen zerlegt. Diese Zer-gungen finden zunächst ihre Anwendung in folgenden eyden Sätzen.

18. Wären in $a + b.x + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 +$ etc. die , b, c, d . . . ganz unabhängige, durch kein Gesetz it einander verbundene, Grössen, wo also auch b icht von a, c nicht von b, d nicht von c, u. s. w. deri-iten; so liesse sich gleichwohl

$$\varphi(a + b.x + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \text{etc.})$$

$$=$$

$$\varphi a + D.\varphi a.x + \frac{D^2.\varphi a}{1.2} . x^2 + \frac{D^3.\varphi a}{1.2.3} . x^3 + \text{etc,}$$

wie in 15) setzen und so die a, b, c, d . . . als einstwellen von einander derivirend betrachten, wenn man nur hinterher, nachdem die zusammen-esezten Derivationen in einfachere aufgelöfst worden (17) $D.a$ mit b, $D^2.a$ mit c, $D^3.a$ mit d, u. s. w. aus-uscht, oder, nach vollbrachten Derivationen, $D.a = b$, $.b = c$, $D.c = d$, u. s. w. sezt. Die Entwicke-lung (17) liefert nämlich das volle Resultat der von einander abhängigen Grössen $D.a$, $D^2.a$, $D^3.a$, u. s. w die man sodann durch jene Austauschung mit , c, d . . . als ganz unabhängig von einander an-ehen und betrachten kann.

Die Function

$$\varphi(a + b.x + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \text{etc})$$

für jede a, b, c, d . . . in eine Reihe von der Gestalt

$$A + B.x + \frac{C}{1.2}x^2 + \frac{D}{1.2.3}x^3 \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}x^n + \text{etc.}$$

zu entwickeln, wäre demnach $A = \varphi a$, $B = \text{D}.\varphi a$, $C = \text{D}^2.\varphi a \ldots$, $A_n = \text{D}^n.\varphi a$. Bey Formirung der Derivationen würden hier alle $\text{D}.a$, $\text{D}^2.a$, $\text{D}^3.a$ u. s. w. als variable Grössen zugelassen, aber nachher b für $\text{D}.a$, c für $\text{D}.^2a$, d für $\text{D}^3.a$, u. s. w. oder $\text{D}.a, = b$, $\text{D}.b = c$, $\text{D}.c = d$, u. s. w. gesezt [no. 6].

19. Da die Polynomien selten in der Form

$$a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.},$$

oder mit den numerischen Coefficienten $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$ $\frac{1}{1.2.3.4}$, u. s. w. versehen, vorkommen, sondern vielmehr in der gewöhnlichen Gestalt

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$$

ohne dergleichen Coefficienten, erscheinen: so sezt man auch gewöhnlich

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots + \alpha_n x^n \ldots)$$

$$=$$

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots + {}_n A x^n \ldots$$

wo α_n, A_n die $n$ten Coefficienten nach dem ersten α, A, respective bedeuten.

Hier darf man nur, wie man leicht übersieht die Derivationen, ohne alle Rücksicht auf die numerischen Coefficienten $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$ u. s. w. machen, und hernach

β	statt	$D.\alpha$	B	statt	$D.A$
1.2γ	‚	$D^2.\alpha$	$1.2\,C$	‚	$D^2.A$
$1.2.3\delta$	‚	$D^3.\alpha$	$1.2.3\,D$	‚	$D^3.A$
‚	‚	‚	‚	‚	‚
$1.2.\ldots n\alpha_n$	statt	$D^n.\alpha$	$1.2.\ldots nA_n$	statt	$D^n.A$

stituiren [no. 7].

ZWEITER ABSCHNITT.

LAGRANGE's erste Auflösung des Hauptproblems zur Entwicklung der Functionen für Polynomien und dessen Derivations-Formel dafür.

Aufgabe. Es sey

$$\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3\ldots+\alpha_n x^n\ldots)$$

willkührliche Function eines beliebigen Polynoms, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ von einander ganz unabhängige ssen seyn mögen; man soll diese Function in eine he von der Gestalt

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots+A_n x^n\ldots$$

wickeln.

uflösung.

Aus		und (19)
$A =$	$\varphi\alpha$	$D.A = B$
$D.A =$	$D.\varphi\alpha$	$D^2.A = 1.2\,C$
$D^2.A =$	$D^2.\varphi\alpha$	$D^3.A = 1.2.3\,D$
$D^3.A =$	$D^3.\varphi\alpha$	$D^4.A = 1.2.3.4\,E$
‚	‚	‚
$D^n.A =$	$D^n.\varphi\alpha$	$D^n.A = 1.2.3\ldots nA_n$

folgt

$$A = \varphi\alpha \qquad D = \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}$$

$$B = \frac{D.\varphi\alpha}{1} \qquad \text{„ „ „}$$

$$C = \frac{D^2.\varphi x}{1.2} \qquad A_n = \frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$$

Demnach ist

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots + A_n x^n \ldots$$

das ist

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots + \alpha_n x^n \ldots)$$

$$=$$

$$\varphi\alpha + \frac{D.\varphi\alpha}{1}x + \frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}x^3 \ldots + \frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}x^n \ldots$$

wo man aber, nach geendeten Derivationen, in (nach 17) gezogenen Resultaten

D. α mit β und eben so	D. A mit B
$D^2.\alpha$ „ 1.2γ	$D^2.A$ „ $1.2C$
$D^3.\alpha$ „ $1.2.3\delta$	$D^3.A$ „ $1.2.3$
„ „ „	„ „ „
$D^n.\alpha$ „ $1.2..n\alpha_n$	$D^n.A$ „ $1.2..n$

umtauschen mufs. Hier werden nämlich die Coefficien β, γ, δ, ε . . . als *Dérivées* der variabeln α betrac und in diese nachher die eben angewiesene Substitu vorgenommen.

21. Wenn man die Werthe der Coefficienten A, C . . . hintereinander berechnet, und jedesma nöthigen Reductionen macht, so kann man schlech

statt D.α D.β D.γ D.δ . . . D.α_{n-1}

setzen 1β 2γ 3δ 4ε . . . $n\alpha_n$

eben so

statt D.A D.B D.C D.D . . . D.A_{n-1} . . .

setzen $1B$ $2C$ $3D$ $4E$ . . . nA_n

29. Bey Entwickelung der Derivationen (erinnert OGAST) könne man, bey einiger Fertigkeit, anstatt die dem Zeichen D behafteten Buchstaben hinzuschrei-, sogleich die für sie zu substituirenden, mit den ehörigen numerischen Coefficienten versehenen, an r Stelle setzen. In diesem Falle aber sey es nöthig, Coefficienten der Potenzen x^0, x^1, x^2, x^3 u. s. w. e gewisse Ordnung, z B. die alphabetische begen zu lassen, oder sie mit gewissen Zeigern (*in-es*) zu versehen; auch sey es vortheilhaft, dafs die gerzahlen mit den Exponenten der Potenzen von berein kommen, zu welchen die Coefficienten gehö-. So folgen in der Reihe $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. Coeffieienten α, β, γ, δ . . . nach der Ordnung Buchstaben, wofür man aber auch α_0, α_1, α_2, α_3 ... en könne, wo die Zeigerzahlen 0, 1, 2, 3 . . . t den Exponenten der zugehörigen Potenzen von x ereinstimmen [no. 9; 52. p. 44].°)

°) Solcher Buchstaben mit Zeigerzahlen bedient sich h LACROIX sehr häufig, und merkt dabey an: A_0, A_1, A_2, , etc. *sont des coefficiens indépendans de* x, *et les chiffres inferieurs* 1, 2, 3 etc. *marquent l'exposant de la puissance de* x, *qui multi- la lettre, à la quelle ils sont attachés; ainsi* A_m *sera le coeffici- t de* x^m. *Ce qui m'a determiné à employer cette notation, quoiqu paraisse un peu compliquée, c' est que par son moyen il sera facile decouvrir la loi qui regne entre les valeurs des coefficiens.* Traité *Calc. diff. p.* 33. Nämlich, schon in der gemeinen Arithmetik, und noch mehr in der Algebra, kommen Operationen Zeichnungen vor, die man nicht für das nimmt, was sie

23. Die Regeln der Entwickelung der Derivatio
D. $\varphi\alpha$ $D^2.\varphi\alpha$. $D^3.\varphi\alpha$ etc. kommen hier mit denen
Differentialcalculs für $d.\varphi\alpha$, $d^2.\varphi\alpha$, $d^3.\varphi\alpha$,
für veränderliche α; $d.\alpha$, $d^2.\alpha$ $d^3.\alpha$ etc. voll
men überein. Auch fällt in die Augen, dafs

$$\varphi\alpha, \frac{D\,\varphi\alpha}{1}, \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}, \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3} \text{ u. s. w. (ohne P}$$

nach dem D) die Coefficienten der successiven Gli

sind, wenigstens nicht daran denkt — combinatorisc
So ist das Schreiben der Zahlen nach ihrer Folge, eine fo
laufende combinatorische Anordnung der Zifferu
giebt die alphabetische Ordnung der Buchstaben a, b
d . . . oder die Reihe der Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . an sich
mit Buchstaben verbunden, die Grundlage für die d
abzuleitenden combinatorischen Ordnungsgeset
und man sieht leicht, dafs, in den gewöhnlichen Fä
auf den todten Buchstaben wenig oder nichts, auf die
beygefügte lebendige Zahl hingegen fast alles ankom
Von den verschiedenen Arten die Coefficienten mit Bu
ben und Zahlen zu bezeichnen, in meinem (*Nov. Syst. C*
p. XXXIV — XLI) ausführlich. Die einfachsten Lokals
chen (wie ich sie nenne) sind die Leibnitzischen *Numeri*
sumtitii siue suppositicii (Ebend. *p. X*, 30. *Refert* etc., und bi
S. 154. A). BÜRMANNS geistreiches *Polynome Combinatoire.* (b
S. 51. ff.) giebt unzählige Beyspiele von diesem Gebrauche.

Die Mittel also, die ARBOGAST hier (in 22) für die Zei
nung der Coefficienten der Potenzen von x vorschlägt,
bey einiger Fertigkeit, statt der derivativen Zeich
sogleich ihre Werthe schreiben zu können, [no. 9] sind wa
haft combinatorischer Art, und die combinatoris
Differenzial-Formel, die in der Folge (39) soll aufgeführt w
den, wird zeigen, wie das was ARBOGAST fordert, und
die wirkliche Ausübung immer noch sehr schwierig erfund
werden dürfte (weil man doch eine Derivation nach der
dern suchen mufs, um zu wissen, was man an ihrer St
zu substituiren habe); diese Formel, sage ich, wird zeig
wie jene Forderuug mit absoluter Leichtigkeit, die nichts
wünschen übrig läfst, sich ausführen lasse.

r Entwickelung von $\varphi(\alpha + x)$; und

$\varphi\alpha, \frac{D.\varphi\alpha}{1}, \frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2}, \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3.}$ u. s. w. (mit ei-

m Punct nach dem D) die Coeffieienten der succes-ven Glieder der Entwickeluug von $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2$ etc.) sind [no. 10]; wo also $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$ den $(n+1)$ten efficienten dieser Entwickelung ausdrückt, d. i. $(\nu)\ n(n+1)$, wenn man $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.} = p$ tzt.

24. Das erste Glied $\varphi\alpha$ der evolvirten Function 3, 20) oder dasjenige, von welchem man alle übrige rivirt, heifst der Anfang oder Ursprung (*origine*) r Derivationen. Zuweilen fällt das Derivations-setz deutlicher in die Angen, wenn man das zweye Glied zum Anfange der Derivationen nimmt.

Ist dieses Anfangsglied gegeben, und hat man da-n, oder in einigen der evolvirten Glieder, die Grös-aufgefunden, welche Functionen von andern Grös-sind, so macht das Übrige sofort keine Schwierig-t, und die weitere Entwickelung geschieht fast ganz chanisch: alles bezieht sich nemlich auf eine Reihe n Operationen, die sämtlich einen regelmäfsigen ng befolgen.

Hätte das erste Glied α des Polynoms einen beson-rn Werth; wäre z. B. $\alpha = 1$, so würde $\varphi 1$ kein be-emes Anfangsglied seyn, die übrigen Glieder daraus deriviren. Man setze in diesem Falle statt 1 eine rösse von unbestimmtem Werthe α, mit dem Vorbe-lt in den gezogenen Resultaten den besondern Werth wieder in die Stelle von α zu setzen [no. 11].

Hier ein paar Beyspiele zu Erläuterung der Auflö-ngsformel für die Aufgabe (20).

Exempel I.

[illegible]. Die Function

$$(a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^m$$

in eine Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

zu entwickeln.

Auf. Weil x jede beliebige Werthe haben ka[illegible] [illegible] von x unabhängigen Grössen, [illegible] einander gleich seyn. Daraus folgen, das erste G[illegible]

$A = x^m$, und daraus weiter $B = \text{r}.A$, und $C =$ [illegible]

und $D = \frac{\text{r}.C}{3}$, und $E = \frac{\text{r}.D}{4}$, u. s. w.

übrigen Coefficienten; jeder folgende aus dem nä[illegible] vorhergehenden hinter einander, durch ganz [illegible] fache Derivationen (nach 21). Der Calcul, ohne [illegible] tere Abkürzung, giebt folgendes:

$$A = x^m$$

$$B = \text{r}.A = m\,x^{m-1}.\beta$$

$$2C = \text{r}.B = m\,x^{m-1}.2\gamma + m.m-1.x^{m-2}.\beta.\beta.$$

$$C = m\,x^{m-1}\gamma + \frac{m\ m-1}{1\ .\ 2}\,x^{m-2}\beta^2$$

$$\begin{aligned} 3D = \text{r}.C = {} & m\,x^{m-1}.3\delta \\ & + m.m-1.\,x^{m-2}\beta.\gamma \\ & + \frac{m.m-1}{1\ .\ 2}\,x^{m-2}\,2\beta.2\gamma \\ & + \frac{m.m-1}{1\ .\ 2}\,(m-2)\,x^{m-3}\beta.\beta^2 \end{aligned}$$

$$D = m\alpha^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}.2\varepsilon\gamma + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}\varepsilon^3$$

$$= D.D = m\alpha^{m-1}.4\varepsilon + m.m-1.\alpha^{m-2}.\beta\delta + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}.2\beta.3\delta + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}.2\gamma.2\gamma + \frac{m.m-1}{1.2}(m-2)\alpha^{m-3}.\varepsilon.2\varepsilon\gamma + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}.3\varepsilon^2.2\gamma + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}(m-3)\alpha^{m-4}\varepsilon.\varepsilon^2$$

$$E = m\alpha^{m-1}\varepsilon + \frac{m.m-1}{1.2}[2\beta\delta+\gamma^2] + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}.3\varepsilon^2\gamma + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}\varepsilon^4$$

u. s. w. Die successiven Derivationen D.A; D.B; D.C; D; etc. machen, wie man sieht, keine Schwierigkeit; aber die daraus erfolgenden Reductionen führen Weitläuftigkeiten.

Exempel II.

26. Das 5te Glied der Function

$$\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc.}) = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}$$

entwickeln.

Auflösung. Das gesuchte Glied ist $Ex^4 = \frac{D^4.\varphi\alpha}{1.2.3.4}x^4$, aus (20; S. 188) erhellet. Man darf also, den

Coefficienten E zu finden, nur alle Glieder des Werthes von $D^4.\varphi\alpha$ in (17) mit 1.2.3.4 dividiren, und statt $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$, $D^3\varphi\alpha$, $D^4\varphi\alpha$; und $D.\alpha$, $D^2.\alpha$, $D^3.\alpha$, $D^4.\alpha$, die zugehörigen Ausdrücke in $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ setzen. Es ist aber

Für $\varphi\alpha = \log\alpha$	ingleichen (S. 188)
$D\varphi\alpha = +\alpha^{-1}$	$D.\alpha = 1\varepsilon$
$D^2\varphi\alpha = -1\alpha^{-2}$	$D^2.\alpha = 1.2\gamma$
$D^3\varphi\alpha = +1.2\alpha^{-3}$	$D^3.\alpha = 1.2.3\delta$
$D^4\varphi\alpha = -1.2.3\alpha^{-4}$	$D^4.\alpha = 1.2.3.4\varepsilon$

Folglich (17)

$$\frac{D\varphi\alpha.D^4.\alpha}{1.2.3.4} = \frac{\alpha^{-1}.1.2.3.4\varepsilon}{1.2.3.4} = \alpha^{-1}\varepsilon$$

$$+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2.3.4}(4D.\alpha.D^3.\alpha+3[D^2.\alpha]^2)$$

$$=\frac{-\alpha^{-2}}{1.2.3.4}(4\varepsilon.1.2.3\delta+3.4\gamma^2)$$

$$=-\frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\delta+\gamma^2)$$

$$+\frac{6D^3\varphi\alpha.(D.\alpha)^2.D^2.\alpha}{1.2.3.4} = \frac{6.1.2\alpha^{-3}\varepsilon^2.1.2.\gamma}{1.2.3.4}$$

$$=\frac{\alpha^{-3}}{3}.3\varepsilon^2\gamma$$

$$+\frac{D^4\varphi\alpha(D.\alpha)^4}{1.2.3.4} = \frac{-1.2.3\alpha^{-4}.\varepsilon^4}{1.2.3.4} = -\frac{\alpha^{-4}}{4}\varepsilon^4$$

Die Summe dieser Werthe giebt demnach $\frac{D^4.\varphi\alpha}{1.2.3.4}$ d.i.

$$E = \alpha^{-1}\varepsilon - \frac{\alpha^{-2}}{2}(2\varepsilon\delta+\gamma^2) + \frac{\alpha^{-3}}{3}.3\varepsilon^2$$

$$-\frac{\alpha^{-4}}{4}\beta^4$$

mit dem Ausdrucke für E [no. 12; S. 9.] übereinstimmend. Auch hier (wie in 25) führen die Derivatio-

nen durch überflüssige Factoren, die sie auffühlren, und weshalb man erst eine Reduction anstellen muſs, in Weitläuftigkeit. Man vergleiche Note (n).

27. Die beiden Beispiele (25, 26) erläutern das Verfahren von zwo Seiten vollständig. Ein Paar andere, aber nur von der ersten Art (wenn nehmlich folgende Glieder aus nächst vorhergehenden abgeleitet werden) hat ARBOGAST [no. 14, 16] beygebracht; auch gelegentlich gezeigt, wie daraus für die Coefficienten A, B, C, D .... die bekannten Formeln mit recurrirenden Gliedern können hergeleitet werden.

DRITTER ABSCHNITT.

Simplification des Arbogastischen Satzes [*no. 7. hier* 20] *durch die combinatorische Analysis. Ableitung desselben Satzes, von derivativen Vorstellungen unabhängig, durch die combinatorische Methode der Potenzen. Uebergang aus den Differentialen von* φx, *wo alle höhere Differentiale von x beibehalten werden, in die Reihe für* $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + etc.)$. *Verschiedene Bedeutungen der derivativen Function* $\frac{D^{u}.\varphi^{m}}{1.2..n}$.

28. Die Fiction (9), die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ der polynomischen Reihe unter dem Functionalzeichen als veränderlich und von einander abhängig anzusehen, und $\frac{D^{n}.\varphi\alpha}{1.2..n}$ als eine in die einfachern $\frac{D\varphi\alpha}{1}, \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}, \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3} \ldots \frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n}$, und

in D.α, D^2.α, D^3.α . . . D^n.α mit ihren Potenzen, z
legbare Differentiation (17) aufzustellen, i
am Ende 1 ε; 1.2γ; 1.2.3δ . . . 1.2 . . $n\,\alpha_n$ s
D.α; D^2.α; D^3.α . . . D^n.α zu sezen (20); dieser
danke, sage ich, ist sinnreich und vielumfasse
So leicht aber auch auf diesem Wege, wie so el
gezeigt worden ist, die ersten Glieder sich entw
keln lassen, so erinnert doch ARBOGAST selbst [no. 1
(weil dadurch Grössen, die aus denselben Buchstab
bestehen, nicht selten mehreremale P) aufgeführt, u
so Reductionen der zugehörigen numerischen Co
ficienten wiederhohlt veranlafst werden) es führe di
ses Verfahren für spätere Glieder zu Weitläuftigkeite
um so mehr, je entfernter diese vom ersten oder de
Anfangsglie de sind. „Man hat also" (fährt di
ser scharfsinnige Analyst fort) Grund zu fragen,
„sich nicht dieses Verfahren bis zu dem Puncte ve
„einfachen lasse, dafs alle Reduction dab
„aufgehoben wird, dergestalt, dafs wenn irge
„ein Glied (gut) geordnet gegeben ist, man auge
„blicklich das nächstfolgende daraus ableiten, od
„auch jedes Glied für sich und aufser der Or
„nung [*terme isolé et hors du-rang*, no, 40.] v
„allen übrigen, vorhergehenden und folgenden, un
„hängig darstellen, und zwar bereits ganz red
„cirt und in der einfachsten Gestalt darst
„len könne; mit solcher Leichtigkeit, dafs nicht me
„Zeit dazu erfordert wird, als nöthig ist, die Glie
„zu schreiben [no. 30, 42.]."

P) So z. B. im Exempel I. (25.) kommen die Glied
welche $\alpha^{m-2}\,\varepsilon\gamma$ und $\alpha^{m-2}\,\beta\delta$ und $\alpha^{m-3}.\varepsilon^2\,\gamma$ enthalten,
des zweymal; und so diese und andere in der Folge noch öf
vor; welches denn mehrere Reductionen ihrer Zahlencoe
cienten nöthig macht. Wegen der Zahlencoefficienten und
rer Reduction vergleiche man Exempel II. (26.)

29. Diese Forderung ist so vollkommen mit dem übereinstimmend, was an den combinatorischen Anordnungen schon vorlängst und mehrere male, vorzugsweise gerühmt [9]), und nur noch neuerlich bey Aufstellung einer combinatorischen Involution (Samml. III. S. 98.) von mir wiederholt worden ist. Ich will auch diese Stelle zu unmittelbarer Vergleichung hier übersetzen: „Eine leichtere Darstellung durch Ableitung der Complexionen, oder ihrer Ordnungen, von einander, läfst sich nicht gedenken Sie bedarf keiner Vorbereitung, stellt die Buchstaben, sogleich mit ihren Exponenten versehen, auf, und ist frey von allen Substitutionen complexer Zeichen. Ihre rein-combinatorische Anordnung beruht ganz auf einer äusserst leichten Umtauschung der Buchstaben und ihrer Potenzen, die nicht mehr Zeit erfordert, als man nöthig hat, ihre Glieder zu schreiben. Alles wird gleich so und an dem Orte, ohne etwas weiter dabey zu ändern (reduciren) oder zu verrücken, zusammengesetzt, wie und wo man es zum Gebrauche nützlich findet; gleichviel, ob man die einzelnen Complexionen unter oder nebeneinander, oder in welcher andern Lage man sie schreiben will."

30. Für die Evolution der Functionen werden demnach (in 28) von dem derivativen Verfahren gleiche Vortheile, als (in 29) von den combinatori-

9) *Adhibui notationis modum eiusmodi, qui terminorum singulorum progressus legem — manifeste ante oculos ponit, sic vt, ex terminis, qui proponuntur, generalioribus, terminorum quaesitorum coefficientes quicunque, exordine et extra ordinem, a praecedentibus independenter, in terminis statim simplicissimis, per coefficientes datos particulares definitis, facillime possint, et absque vlla reductione, quae vulgo comitari solet substitutiones,* DERIVARI. *Iuſin. Digr. Praef. p. XII, XIII.*

schen Involutionen versprochen. Was letztere leisten, ist allgemein bekannt, und die Kenner haben hierüber einstimmig entschieden. Auch darüber scheint man bisher einverstanden gewesen zu seyn, dafs eine so leichte Darstellung der Glieder, wie die combinatorische, auf einem andern Wege schwerlich oder gar nicht zu erreichen seyn möchte. Um so mehr wird die Erwartung gespannt, durch welches nicht-combinatorische Verfahren, und wie insbesondere durch analytische Derivationen, oder ihre Vermittelung die (in 27) versprochenen Vortheile zu erlangen seyn dürften?

31. Bevor ich zu dem von ARBOGAST [no. 20, 21] eigends dafür aufgestellten, und besonders (von jenem Satze [no. 7] hier (20) unabhängig) erwiesenen Lehrsatze fortgehe, so wird es nützlich seyn zu versuchen, in wie fern jener, an sich zwar lehrreiche und wichtige, aber für die Ausübung und Anwendung zu behandeln schwierige (28) Satz [no. 7] sich combinatorisch verbessern und erleichtern, und zu einem; dem [no. 20] vollkommen gleichgültigen Lehrsatz umformen und darstellen lasse. Eine weitere Analyse und Simplification des Satzes [no. 7] ist gewifs ganz in dem Arbogastischen Plane; um so mehr, wenn er sich zuletzt in den Satz [no. 20] auflöst, und dadurch den Zusammenhang beider deutlich vor Augen legt.

32. Unbehülflich ist der derivative Satz (20) darinn, dafs man seine Coefficienten $\frac{D.\varphi x}{1}$, $\frac{D^2.\varphi x}{1.2}$, $\frac{D^3.\varphi x}{1.2.3}$ . . . $\frac{D^n.\varphi x}{1.2...n}$, durch successive Differentiation suchen mufs (17) und kein Mittel angegeben wird, wie man sie unabhängig von einander finden, oder doch die im ersten Falle eintretenden grofsen Weitläuftigkeiten (Note n) vermeiden könne. Ein

ahren, das dieser Unbequemlichkeit abhülfe, würde
n eine grofse Verbesserung seyn. Eine solche
l man in der Anwendung der vom Professor PFAFF
estellten Aufgabe (Samml. II. S. 158. §. 4.) und
n Auflösung (das. S. 160, 161.) finden [r]).

33. Die Pfaffische Aufgabe in solchen Zeichen auf-
ihren, als man hier braucht, darf man nur

statt der dortigen	hier setzen:	statt der dortigen	hier setzen:
d^n	D^n.	x	α
X	$\varphi\alpha$	dx	$\mathrm{D}.\alpha$
X'	$\mathrm{D}\varphi\alpha$	d^2x	$\mathrm{D}^2.\alpha$
X''	$\mathrm{D}^2\varphi\alpha$	d^3x	$\mathrm{D}^3.\alpha$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
X^n	$\mathrm{D}^n\varphi\alpha$	d^nx	$\mathrm{D}^n.\alpha$

nun die

„Aufgabe (a. a. O. S. 158.)

„Es sey $\varphi\alpha$ irgend eine Function der veränderli-
en α; aus ihren Differentialen, wenn $\mathrm{D}\alpha$ beständig
, dieselbigen herzuleiten, wenn kein beständiges
fferential von α angenommen wird.“

[r]) Die Auflösung der Aufgabe wird dort (S. 160) zuerst
okalzeichen $P\varkappa n$; $P^2\varkappa(n-1)$; $P^3\varkappa(n-2)$; ...
n die combinatorischen Classenzeichen
; $\mathfrak{b}^n\mathrm{B}$; $\mathfrak{c}^n\mathrm{C}$; ... correspondiren, ausgedrückt. Ich
hier die letzte Darstellung (S. 161) aufführen, und die
(in Lokalzeichen) in der Folge (43) nachholen. Es
nützlich, beyde zu kennen, um nach Umständen Ge-
ch davon zu machen.

„Auflösungs-Formel (Ebend. S. 161.)

$$\text{„ } \frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n} = \frac{D\varphi\alpha}{1}\,a^n A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\,b^n B$$

$$\text{„ } + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}\,c^n C + \ldots + \frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n}\,n^n N$$

$$\text{„ } \left(\frac{1}{D.\alpha}, \frac{2}{D^2.\alpha}, \frac{3}{D^3.\alpha} \ldots\right)$$

Das hier in Klammern Eingeschlossene ist bekannte maſsen der Zeiger für die Complexionen der Combinationsklassen ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$, etc.

34. ARBOGAST unterscheidet [no. 35] *Dérivées simples*, wie $D^n.\varphi\alpha$, von *Derivées divisées*, $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$; auch bestimmt der Werth der einen Art sogleich den Werth der andern. So z. B. wäre (33)

$$D^n.\varphi\alpha = 1.2..n\left[\frac{D\varphi\alpha}{1}\,a^n A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\,b^n B + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}\,c^n C + \ldots + \frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n}\,n^n N\right]$$

(Der Zeiger hier, wie in 33).

Für die *Dérivées divisées* wird [no. 39] ein besonderes Zeichen eingeführt, und $\underset{c}{D}^m$ statt $\frac{D^m}{1.2..m}$, ingleichen $\underset{c}{D}^n.\varphi\alpha$ statt $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$ gesetzt. Ich werde mich für den wenigen Gebrauch, den ich von diesen Zeichen hier mache, dieser Abkürzung nicht bedienen.

Exempel zu (34).

35. Den Werth der einfachen *Derivée* $D^5.\varphi\alpha$, von den vorhergehenden unabhängig, in Differentialen von $\varphi\alpha$ und α, gut geordnet darzustellen.

Man setze $n=5$ in (34) und entwickle, nach dem Leiger, die Complexionen der Classen ^5A, ^5B, ^5C, D, ^5E, mit Vorsetzung der zugehörigen Versetzungs-ahlen oder Polynomialcoefficienten a, b, c, d, e, und beyfügung der $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$ . . . $D^5\varphi\alpha$, wie solche in ler Formel den einzelnen Classen vorstehen. Dies iebt:

$$D^5.\varphi\alpha =$$

$$D\varphi\alpha.D^5.\alpha + D^2\varphi\alpha[5D.\alpha.D^4.\alpha + 10D^2.\alpha.D^3.\alpha]$$
$$+ D^3\varphi\alpha[10(D.\alpha)^2.D^3.\alpha + 15D.\alpha(D^2.\alpha)^2]$$
$$+ D^4\varphi\alpha.10(D.\alpha)^3.D^2.\alpha + D^5\varphi\alpha.(D.\alpha)^5$$

36. Ausserdem, dafs man vermittelst der Pfaffi-chen combinatorischen Formel jedes Glied $D^n.\varphi\alpha$ mit oder ohne Divisor $(1.2.3..n)$ von allen vor-hergehenden unabhängig, findet, erlangt man das ge-uchte Resultat auch viel leichter als auf dem Wege ler successiven Derivation. Den Unterschied deut-lich einzusehen, dürfte man nur hier $D^5.\varphi\alpha$ aus $D[D^4.\varphi\alpha]$ nach dem Werthe von $D^4.\varphi\alpha$ in (17) durch gewöhn-liche Differentiation suchen, wo man gar bald, und noch vielmehr bey spätern Gliedern, in Weitläufig-keiten gerathen würde.

37. Setzte man in (35) die Werthe von $\varphi\alpha$ und ler Differentialen von $\varphi\alpha$ und α, wie in (26) also

$$\varphi\alpha = log.\alpha; D\varphi\alpha = \alpha^{-1}, \ldots D^5.\varphi\alpha = 1.2.3.4\alpha^{-5}$$
$$D.\alpha = 1\beta; D^2.\alpha = 1.2\gamma; \ldots D^5.\alpha = 1.2.3.4.5\zeta$$

und dividirte alle Glieder durch $1.2.3.4.5$, so fände man den Coefficienten des 6sten Gliedes von

$$log.(\alpha + \varepsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.})$$

oder $$F = \alpha^{-}.\zeta - \frac{\alpha^{-2}}{2}(2\varepsilon\varepsilon + 2\gamma\delta)$$
$$+ \frac{\alpha^{-3}}{3}(3\varepsilon^2\delta + 3\varepsilon\gamma^2) - \frac{\alpha^{-4}}{4}4\varepsilon^3\gamma + \frac{\alpha^{-5}}{5}\varepsilon^5$$

gleich gut geordnet; vollkommen, wie [no. 12, p. 9]

38. Das Verfahren (35 — 37) wo man 1) die *D vée simple* $D^5.\varphi\alpha$ (durch Aufhebung des Divi $1.2.3.4.5$) nach (34), in $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$ . . . D^5 und $D.\alpha$, $D^2.\alpha$ . . . $D^5.\alpha$ ausdrückt, 2) nachher die V the 1β; 1.2γ . . . $1.2.3.4.5\zeta$, für $D.\alpha$; $D^2.\alpha$; . $D^5.\alpha$ (37) substituirt, und zugleich 3) durch den visor $1.2.3.4.5$ die *Derivée simple* zur *divisée* mac dieses Verfahren, sage ich, würde ein beträchtlic Umweg seyn, und dennoch wäre er viel kürzer, wenn man die gewöhnliche Heerstrafse der successiv Differentiation verfolgt. Aber es läfst sich dassel sehr stark, und über alle Vorstellung hinat beträchtlich, abkürzen und simplificiren, wenn m die Substitution der Werthe für

$$D.\alpha = 1\beta;\quad D^2.\alpha = 1.2\gamma;\quad D^3.\alpha = 1.2.3\delta;$$
$$D^4.\alpha = 1.2.3.4\varepsilon,\ \text{etc.}$$

nicht in den entwickelten Werth von $D^n.\varphi$ in (35) sondern sogleich in den Zeiger der Au lösungsformel (33) macht. Denn durch diet Substitution verwandelt sich jener zusammeng setzte Zeiger (33)

$$\left(\frac{1}{D.\alpha}, \frac{2}{D^2.\alpha}, \frac{3}{D^3.\alpha}, \frac{4}{D^4.\alpha}, \frac{5}{D^5.\alpha} \ldots\right)$$

in den ganz einfachen

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \ldots \end{pmatrix}$$

Hier bleiben blos die leicht zu übersehenden $D\varphi$ $D^2\varphi\alpha$, $D^3\varphi\alpha$, . . . in der Formel (33); die beschwe liche Differentiation $D^n.\varphi\alpha$ hingegen, fällt ganz we weil die $D.\alpha$: $D^2.\alpha$, $D^3.\alpha$, . . . die man daraus braucht nun durch die simpeln β, γ, δ, . . . vertreten wc den, deren Verbindungsgesetz durch die $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n I$ $\mathfrak{c}^n \mathfrak{L}$, . . , combinatorisch, das heifst hier, m

oluter Leichtigkeit (Note o am Ende) ge-
n sind, die nichts zu wünschen übrig läfst.

39. Und nun die aus (38) abgeleitete combina-
isch-analytische ganz simple Auflösungs-
mel des Hauptproblems (20).

Es ist nämlich: $\varphi\ (p)\ x\ (n+1)$ oder

$$A_n = \frac{D^n.\varphi x}{1.2..n} = \frac{D\varphi x}{1}\ a^n A + \frac{D^2\varphi x}{1.2}\ b^n B + \frac{D^3\varphi x}{1.2.3}\ c^n C + \ldots + \frac{D^n\varphi x}{1.2..n}\ n^n N \quad (33)$$

glich $\varphi(x+\mathfrak{G}x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5+\text{etc.})$

φx

$\frac{D\varphi x}{1}\ a^1\ Ax$

$\left(\frac{D\varphi x}{1}\ a^2\ A + \frac{D^2\varphi x}{1.2}\ b^2\ B\right) x^2$

$\left(\frac{D\varphi x}{1}\ a^3\ A + \frac{D^2\varphi x}{1.2}\ b^3\ B + \frac{D^3\varphi x}{1.2.3}\ c^3\ C\right) x^3$

$\left(\frac{D\varphi x}{1}\ a^4\ A + \frac{D^2\varphi x}{1.2}\ b^4\ B + \frac{D^3\varphi x}{1.2.3}\ c^4\ C + \frac{D^4\varphi x}{1.2.3.4}\ b^4\ D\right) x^4$

$$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta, & \theta, & \iota, & \varkappa \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9 \ldots \end{pmatrix}$$

Fortgangsgesetz, sowohl für die successiven Diffe-
tiale $\frac{D\varphi x}{1}, \frac{D^2\varphi x}{1.2}, \frac{D^3\varphi x}{1.2.3} \ldots$ als auch für die
mbinatorischen Grössen $a^n A$, $b^n B$, $c^n C \ldots$ fällt
utlich in die Augen.

40. In dieser evolvirten Function ist eben so
in (20) α der einzige mit dem Functionalzeichen φ
haftete Buchstabe; daher auch die Differentialen
$\varphi\alpha$, nach Beschaffenheit der Function, sehr **verschi**
dene Werthe haben können. Die folgenden Co
cienten β, γ, δ, ε . . . der polynomischen Reihe
gegen, machen die Bestandtheile der **Combinatio**
classen ^{n}A, ^{n}B, ^{n}C ^{n}D, . . . nach dem beygef
Zeiger aus. Diese Classen, mit den zugehörigen V
setzungszahlen a, b, c, b . . ., der Elemente i
einzelnen Complexionen, stellen die Coefficienten
Potenzen ganzer positiver Zahlen 1, 2, 3
der Reihe $\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+$ etc. dar, und sind
alle mögliche Functionen der Polynomi
für denselben Zeiger, **dieselben**; daher sie
ARBOGAST mit einem auszeichnenden Namen **Poly**
mial-Grössen genannt hat [no. 23]. Wie sich
Complexionen der Combinationsclassen, ^{n}A, ^{n}B, ^{n}C
für bestimmte Werthe von n, combinatorisch ent
keln und darstellen lassen, kann ich, als bek
voraussetzen. Diejenigen Leser inzwischen, die gle
wohl **hier** noch einige Belehrung wünschen und
warten, werden solche im **ersten Anhange** zu
ser Abhandlung finden.

41. Der Satz (39) bei welchem die Aufgabe (
zum Grunde gelegt worden, läfst sich auch aus T
lor's Satze, auf **blos combinatorischen** We
ganz kurz und **direct** herleiten, auch vortheil
darauf mein *Methodus Potentiarum* (*Infin. D*
p. 101, 102) anwenden, von welchem ich erinn
und durch eine grofse Menge von Beyspielen (*I*
p. 102 — 120) gezeigt habe, dafs er eine Brücke
auf welcher man aus den Functionen der **Binomi**
in die der **Polynomien** bequem übergeht [s]).

[s]) *Methodi Potentiarum latissime patet usus, quando*
dem generaliter potest et directe applicari, ubi in functione

42. So wie nemlich aus dem Binom $\alpha + x$ das Polyn $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc hervorgeht, wenn man t x in jenem, die Reihe $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. für es setzt: eben so darf man nur in der entwickelten ction (12)

$$\varphi(\alpha+x) = \varphi\alpha + \frac{D\varphi\alpha}{1}x^1 + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}x^2 + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

rall statt x und ihren Potenzen, die Reihe $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. und ihre Potenzen, combinatorisch entkelt, setzen und zuletzt alles nach x^0, x^1, x^2, x^3, ... nach steigenden Potenzen von x, ordnen, indem die zu einerley Potenz von x gehörigen Coefficien- zusammen nimmt [t]). Die Substitution jener Entkelung, so wie diese Anordnung, hilft nun der *Methodus Potentiarum* ersparen, der alles in combinischen Zeichen sogleich entwickelt und gehörig get auf einmal darstellt.

Vergleicht man nämlich die Reihe in y (*Infin. Dign.* 01, no. 2.) linker Hand des dortigen Gleichheitschens, mit der hier entwickelten Reihe für $\varphi(\alpha+x)$ zweiten Gliede an, so sind

dort: $a \quad b \quad c \quad d \quad \ldots ; y$

hier: $\frac{D\varphi\alpha}{1}, \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}, \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}, \frac{D^4\varphi\alpha}{1.2.3.4} \ldots ; \infty$

man findet, statt des dortigen z rechter Hand des chheitszeichens, hier x gesetzt:

rie, terminis quotcunque constante, pro simplicium dignit (x^n) *substituendae sunt polynomiorum potestates* $+\gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc.$)^n$; *quo fit, ut ad functionum evolutes, serierumque et aequationum transformationes sit fructissima* (*Infin. Dign. Praef. p. XII.*)

[t]) Eine ähnliche Substitution, in ähnlicher Absicht, hat ARBOGAST [no. 20, 21.] vorgenommen. Man sehe (55).

$$\left(\frac{d^1x}{1}, \frac{d^2x}{1.2}, \frac{d^3x}{1.2.3}, \frac{d^4x}{1.2.3.4} \ldots \ldots\right)$$

herbey, der sie enthält.

III. Die Arbogastische Annahme (8, 9), die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ der polynomischen Reihe a veränderlich anzusehen, und auch so zu behandeln verstattet, die Auflösungsformel für $\frac{d^n.\varphi x}{1.2..n}$ (in II.) auch auf $\frac{d^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$ auszudehnen, und bei der so nahen Verwandschaft der Differentiationen und Derivationen unter einander (13), die Zeichnung (33) dafür festzusetzen. Daraus ergeben sich die Werthe der *Derivées divisées* und *simples*, ausser der Ordnung, viel leichter, als auf dem gewöhnlichen Wege der successiven Differentiation (34, 35, 36).

IV. ARBOGAST nimmt ferner die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ nicht blofs als veränderliche, sondern auch als von einander abhängige Grössen an, wie unabhängig sie auch immer an sich seyn mögen. Dieser hevristischen Fiction gemäfs, werden nach geendigten Derivationen, für $D.\alpha$, $D^2.\alpha$, $D^3.\alpha$, ... die zugehörigen $1\mathfrak{G}$; 1.2γ; $1.2.3\delta$; ... gesezt (20) und das Exempel (37); und so findet man sich auf einmal aus φx und ihren Differentialen, in $\varphi(\alpha + \mathfrak{G}x + \gamma x^2$ etc.) und ihre Evolution versetzt; in so fern nämlich die Coefficienten der zu evolvirenden leztern Function von den Differentialen der ersten sich ableiten lassen.

V. Schafft man nach ARBOGAST's Vorschrift, $D.\alpha$; $D^2\alpha$; $D^3.\alpha$ .... und ihre Potenzen erst in die Formel (II) nach dem dortigen Zeiger, und substituirt dann die zugehörigen Werthe (IV) für sie, so geräth man in Weitläuftigkeit, die man vermeidet, wenn

an (38) die Substitution sogleich in den Zeiger selbst
acht. Dadurch verschwinden alle derivativen Aus-
ücke auf einmal, und die ganz einfachen β, γ, δ, ε...
cheinen an dem Platze ihrer Stellvertreter

$$\frac{D.\alpha}{1}\ ;\ \frac{D^2.\alpha}{1.2}\ ;\ \frac{D^3.\alpha}{1.2.3}\ ;\ \frac{D^4.\alpha}{1.2.3.4}\ ;\ \ldots$$

d geben so den Zeiger für die Classen ${}^{1}A$, ${}^{1}B$,
... ${}^{1}N$.

VI. Daraus fliefst der nicht weiter abzukürzende
alytisch-combinatorische Satz (89) —
ie schöne Blume, auf derivativen Boden gezogen,
o) und in combinatorischen verpflanzt, wo sie so
rrlich gedeiht! —

VII. Will man die combinatorische Evolutionsfor-
l (39) von derivativen Vorstellungen (III, IV) ganz
abhängig, so leicht und so geschwind als möglich
stellen: so darf man nur das in (41) an- und in
ausgeführte directe combinatorische Verfah-
befolgen. Die combinatorische Methode der
tenzen führt hier geschwinder, als jede andere
m Ziel.

VIII. Aus der Evolutionsformel (39) folgt sogleich,
möge Substitution der Localwerthe für die Clas-
, die correspondirende Localformel (43).

45. Es verdient besonders bemerkt zu werden,
man hier (44) aus den Differentialen von
(wo dx, d^2x, d^3x, u. s. w. alle höhere Differen-
len beybehalten werden) in die Coefficienten
Reihe für $\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+$ etc.) übergeht.

Ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential,

$$\text{I.}\quad \frac{d^n.\varphi x}{1.2..n} = \frac{d\varphi x}{1}\,\mathfrak{a}^n\,A + \frac{d^2\varphi x}{1.2}\,\mathfrak{b}^n\,B + \ldots + \frac{d^n\varphi x}{1.2..n}\,\mathfrak{n}^n\,N$$

$$\left(\frac{1}{\frac{dx}{1}}, \frac{2}{\frac{d^2x}{1.2}}, \frac{3}{\frac{d^3x}{1.2\,3}}, \frac{4}{\frac{d^4x}{1.2.3.4}} \ldots\right)$$

Der $(n+1)$te, zu x^n gehörige, Coefficient der R für $\varphi(\alpha + \mathfrak{C}x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ ist (39)

$$\text{II.}\quad \frac{\mathrm{D}^n.\varphi x}{1.2..n} = \frac{\mathrm{D}\varphi x}{1}\,\mathfrak{a}^n\,A + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}\,\mathfrak{b}^n\,B + \ldots + \frac{\mathrm{D}^n\varphi\alpha}{1.2..n}\,\mathfrak{n}^n\,N$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{D}.\alpha = 1.\beta \\ \mathrm{D}^2.\alpha = 1.2.\gamma \\ \mathrm{D}^3.\alpha = 1.2.3\,\delta \\ \quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots \end{array}\right]^{\nu)} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ \mathfrak{C} & \gamma & \delta & \varepsilon \ldots \end{array}\right)$$

Um also aus I in II überzugehen, darf man in I n mit α, und d mit D, vertauschen, und statt des dorti zusammengesetzten Zeigers $\left(\frac{d.x}{1}, \frac{d^2.x}{1.2}, \frac{d^3.x}{1.2.3} \ldots\right.$

$^{\nu)}$ Ich habe, daſs nach geendeten Differentiationen $\mathrm{D}^n.\varphi\alpha$, die $\mathrm{D}.\alpha$, $\mathrm{D}^2.\alpha$, $\mathrm{D}^3.\alpha$ . . . mit $1\,\beta$, 1.2 $1.2.3\,\delta$, . . . zu vertauschen seyen, zeigerförmig (d eckigte Klammern) hier angegeben; denn nur unter di Voraussetzung findet der einfache combinatorische ger unter $\mathfrak{a}^n\,A$, $\mathfrak{b}^n\,B$ . . . statt. Ich werde jenen d stellenden derivativen Zeiger in der Folge, der D lichkeit und Vollständigkeit wegen, neben dem combina schen mit beyfügen, auch, wo es der Raum verstattet, zu len so schreiben:

$$\left[\begin{array}{ccccc} \mathrm{D}.\alpha & \mathrm{D}^2.\alpha & \mathrm{D}^3.\alpha & \mathrm{D}^4.\alpha & \ldots\ldots \\ 1\,\mathfrak{C} & 1.2\,\gamma & 1.2.3\,\delta & 1.2.3.4\,\varepsilon & \ldots\ldots \end{array}\right]$$

len einfachen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \varepsilon & \gamma & \delta & \cdots \end{pmatrix}$ in II setzen, und die Combinationsclassen ${}^{n}A$, ${}^{n}B$, ... ${}^{n}N$ darauf beziehen: denn dadurch wird den Arbogastischen beiden Annahmen (44, III, IV.) vollkommen Genüge geleistet (44, V.).

46. Exempel, für $\varphi x = log.x$; $\varphi x = e^x$; $\varphi x = x^m$

a) für ein beständiges dx

$$\frac{d^n log.x}{dx^n} = \pm 1.2.3.4 \ldots (n-1)x^{-n}$$

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$$

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m.m-1.m-2 \ldots (m-n+1)x^{m-n}$$

für $dx = 1$, fiele hier auch $dx^n = 1$ im Divisor weg.

b) Ohne Rücksicht auf ein beständiges Differen- (45, I.)

$$\frac{d^n.log.x}{1.2..n} = \frac{1}{x}a^n A - \frac{1}{2x^2}b^n B + \frac{1}{3x^3}c^n C - \ldots \pm \frac{1}{nx^n}n^n N$$

$$\frac{d^n.e^x}{1.2..n} = e^x\left(a^n A + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + \ldots + \frac{n^n N}{1.2..n}\right)$$

$$\frac{d^n.x^m}{1.2..n} = {}^{m}\mathfrak{A}\,x^{m-1}a^n A + {}^{m}\mathfrak{B}\,x^{m-2}b^n B + {}^{m}\mathfrak{C}\,x^{m-3}c^n C + {}^{m}\mathfrak{D}\,x^{m-4}b^n D + \ldots + {}^{m}\mathfrak{N}\,x^{m-n}n^n N)$$

$$\left(\frac{1}{d.x}, \frac{2}{d^2.x}, \frac{3}{d^3.x}, \frac{4}{d^4.x}, \ldots\right)$$

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1.2}, \frac{3}{1.2.3}, \frac{4}{1.2.3.4}, \ldots\right)$$

Nämlich, statt φx (in 45, I.) nach und nach log e^x; x^m gesetzt, und, was diese Substitution gi für $dx = 1$ differentiirt.

c) Wenn man aus φx in die Coefficienten der evolvirenden Function

$\varphi(\alpha + \mathfrak{G}x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ übergeht (45, II.)

$$\frac{D^n . \log . \alpha}{1 . 2 .. n} = \frac{1}{\alpha} \mathfrak{a}^n A - \frac{1}{2\alpha^2} \mathfrak{b}^n B + \frac{1}{3\alpha^3} \mathfrak{c}^n C - \ldots \pm \frac{1}{n\alpha^n} \mathfrak{n}^n N$$

$$\frac{D^n . e^\alpha}{1 . 2 .. n} = e^\alpha \left(\frac{\mathfrak{a}^n A}{1} + \frac{\mathfrak{b}^n B}{1 . 2} + \frac{\mathfrak{c}^n C}{1 . 2 . 3} + \ldots + \frac{\mathfrak{n}^n N}{1 . 2 .. n} \right)$$

$$\frac{D^n . \alpha^m}{1 . 2 .. n} = {}^m\mathfrak{A}\alpha^{m-1} \mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B}\alpha^{m-2} \mathfrak{b}^n B + {}^m\mathfrak{C}\alpha^{m-3} \mathfrak{c}^n C + \ldots + {}^n\mathfrak{N}\alpha^{m-n} \mathfrak{n}$$

$$\begin{bmatrix} D.\ \alpha = 1\beta \\ D.^2\alpha = 1 . 2\gamma \\ D.^3\alpha = 1, 2 . 3\delta \\ \quad , \quad , \quad , \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ \mathfrak{G} & \gamma & \delta & \varepsilon \ldots \end{pmatrix}$$

Hier darf man (in *b*) nur α statt x, und statt dortigen zusammengesetzten combinat(schen Zeigers, den hiesigen einfachen setzen, sich zugleich auf den derivativen Zeiger (Not bezieht. Die ersten beiden Formeln (in *c*) zeigen in der Anwendung am einfachsten; die le dagegen kommt bei weitem am häufigsten im brauche vor.

Für $\frac{D^n . \beta^m}{1 . 2 .. n}$, was bey ARBOGAST und auch hi der Folge oft vorkommt, darf man nur überall, in Formel und den untergesetzten beyden Zeigern

statt $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$

setzen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$

47. Die Reihen (46, *c*) sind lauter $(n+1)$te, zu gehörige, Coefficienten [$\varkappa(n+1)$ oder A_n in (39)] r zu evolvirenden Functionen:

$\log(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})$ [no. 12]

$e^{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}}$ [no. 14]

$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.})^m$ [no. 31]

d zwar, im letzten Falle, für jeden Werth von m nzen und gebrochenen, positiven und negativen.

Exempel für einen bestimmten Werth von n

48. In (46, *c*) sey $n=4$ und m bleibe unbestimmt, ist

$=4=\varepsilon$

$=\binom{13}{22}=\binom{6\delta}{\gamma^2}$

$=112=\beta^2\gamma$

$=1111=\beta^4$

$\begin{pmatrix}\beta & \gamma & \delta & \varepsilon\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$

$^m\mathfrak{A}=m$

$^m\mathfrak{B}=\frac{m.m-1}{1.2}$

$^m\mathfrak{C}=\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$

$^m\mathfrak{D}=\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$

mnach sind die $\varkappa(4+1)$ oder die 5ten Coefficienten Reihen (47)

oder $\log.(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})\times 5$

$=$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}-\frac{2\beta\delta+\gamma^2}{2\alpha^2}+\frac{3\beta^2\gamma}{3\alpha^3}-\frac{\beta^4}{4\alpha^4};$$

erner $(e^{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}})\times 5$

$=$

$$e^{x}\left(\varepsilon+\frac{2\beta\delta+\gamma^{2}}{1\cdot 2}+\frac{3\beta^{2}\gamma}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\beta^{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)=$$

und $(\alpha+\beta x+\gamma x^{2}+\delta x^{3}+\varepsilon x^{4}+\text{etc.})^{m}\varkappa 5$

$$=$$

$$m\alpha^{m-1}\varepsilon+\frac{m.m-1}{1\cdot 2}\alpha^{m-2}(2\beta\delta+\gamma^{2})$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{m-3}.3\beta^{2}\gamma$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^{m-4}\beta^{4}.$$

Die Vergleichung dieser Exempel mit denen in (25, 26, 27) zeigt die schnelle Wirksamkeit der combinatorischen Evolutionsformel (39) augenscheinlich.

Weil sich die rein-combinatorischen Operationen für die Classen ${}^{n}A$, ${}^{n}B$, ${}^{n}C$ . . . in Zahlen und Buchstaben gleich leicht, und von einander unabhängig darstellen lassen, so habe ich sie hier, für $n=4$ bey aufgeführt.

49. Andere Formeln von PFAFF (Samml. II. n. 6.) für $\frac{d^{n}.\sin x}{1\cdot 2..n}$, $\frac{d^{n}.\cos.x}{1\cdot 2..n}$, $\frac{d^{n}.tang.x}{1\cdot 2..n}$, $\frac{d^{n}.cot.x}{1\cdot 2..n}$, $\frac{d^{n}.sec.x}{1\cdot 2..n}$, $\frac{d^{n}.cosec.x}{1\cdot 2..n}$, $\frac{d^{n}.A\sin x}{1\cdot 2..n}$, $\frac{d^{n}.A\cos x}{1\cdot 2..n}$, $\frac{d^{n}.A\,tang.x}{1\cdot 2..n}$, $\frac{d^{n}.A\,cot\,x}{1\cdot 2..n}$; um aus φx in $\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^{2}+\text{etc.})$, aus (45, I in II) überzugehen. Die Polynomialgrössen $a^{n}A$, $b^{n}A$, $c^{n}C$ . . . oder ihre Stellvertreter px^{n}, $p^{2}x(n-1)$, $p^{3}x(n-2)$ . . . (43), bleiben dabei immer dieselben, nur die $\frac{D\varphi x}{1}$, $\frac{D^{2}\varphi x}{1\cdot 2}$, $\frac{D^{3}\varphi x}{1\cdot 2\cdot 3}$ . . . ändern sich nach Verschiedenheit der Function verschiedentlich ab (40).

50. Von den vielfachen Anwendungen der allgemeinen combinatorischen Differenzialformel $\frac{D^n.\varphi x}{1.2..n}$ (45, II) sind die für $\varphi\alpha = \log.\alpha$ und für $\varphi\alpha = \alpha^m$ (46, *c*), besonders die letztere, in Beziehung auf die dortigen Bedeutungen und Zeiger, bey weitem die wichtigsten. Die beiden Arbogastischen Annahmen führen darauf (44, III, IV) und erhöhen dadurch den Nutzen der Pfaffischen Aufgabe ungemein. Die combinatorischen Classenzeichen beziehen sich auf den ganz einfachen Zeiger $\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta & \dots \\ 1, & 2, & 3 & \dots \end{pmatrix}$ und geben so den Formeln in Absicht auf Darstellung und Anwendung, die höchste Vollendung (44, V). Zunächst, und so auch in der Folge, wird häufig $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$ (46, *c*) vorkommen. In diesem Falle wird nehmlich β^m, wie vorher α^m, als *Origine des Dérivations* (24) angesehen.

51. Die derivative Function $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$ spielt in dem arbogastischen Werke eine grofse Rolle, und kommt darinn sehr häufig vor. Ich will daher die verschiedenen Bedeutungen, die dieser Ausdruck nach verschiedenen Ansichten, die dabey statt finden, haben kann, hier angeben. ARBOGAST selbst hat sich darüber ausdrücklich erklärt [no. 52 — 54]. Diesen Erklärungen werde ich noch einige Bemerkungen und Erläuterungen beyfügen.

52. Die Bezeichnung $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$ und andere ähnliche Ausdrücke, so einfach sie auch an sich sind, weil dabey blofs das besondere Zeichen D vorkommt, haben gleichwohl verschiedene Bedeutungen.

I. Sie sind Zeichen von Derivationen. So z. B. drücken $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$ und $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$, durch D^n, eine Reihe von Operationen aus, die man auf $\varphi\alpha$ oder β^m anwenden soll, die sämmtlich dasselbe Gesetz befolgen, und n mal wiederholt werden müssen; überdies zeigen sie, durch das Verhalten des D zu dem Differenzialzeichen d, die Natur dieses Gesetzes an, oder die Art von Derivation, welche der vorliegende Ausdruck erfordert (11, 12, 13).

Beyspiele von $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$, für bestimmte φ (17); allgemeine Evolutionsformel dafür, durch Beyhülfe combinatorischer Zeichen (33, 34). Wegen $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$ vergleiche man (46, *b*) nur statt des dortigen d, x, hier D, β gesetzt. Dieselbe Formel (aber für z^m statt β^m) kommt schon im Arch. der Mathem. H. II. S. 230; 7, 8 vor.

II. Sie sind Zeichen von Coefficienten; und weisen nicht blofs die Zahl des Gliedes zu dem sie gehören, sondern auch die Beschaffenheit der Function des Polynoms nach, von welcher das Glied, dessen Coefficient verlangt wird, ein Theil ist.

Es sey $\varepsilon+\gamma x+\delta x^2+\varepsilon x^3+\zeta x^4+$ etc. $=p$, so drückt

$$\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n} = \frac{p^m\,\varkappa\,(n+1)}{p(\varepsilon,\gamma,\delta\ldots)}$$

1) den Coefficienten des $(n+1)$sten, zu x^n gehörigen, Gliedes (den $(n+1)$ten Coefficienten) der Potenz m von $\beta+\gamma x+\delta x^2+$ etc. aus.

2) Werden dadurch zugleich, die Function β^m und die darauf anzuwendenden Operationen D^n für den gesuchten Coefficienten $p^m\,\varkappa\,(n+1)$ angegeben.

Anmerk. 1. (zu I. II) In der Formel (I) ist β^m nur ein einzelnes Glied (*Monomium*); in (II) wird aber eine ganze Reihe durch dieses *Monomium* ausgedrückt. So z. B. bedeutet $\frac{D^4.\beta^m}{1.2.3.4}$ (in II) den 5ten, zu x^4 gehörigen Coefficienten der Potenz $(\varepsilon+\gamma x+\delta x^2+\varepsilon x^3+$ etc.$)^m$, oder den Coefficienten E, wie er (in 25) gefunden worden ist; nur statt der dortigen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, hier $\varepsilon, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gesetzt. Eben so zeigt $\frac{D^{10}.\sin.\gamma}{1.2\ldots10}$ den Coefficienten des 11ten Gliedes der zu entwickelnden Function $\sin(\gamma+\delta x+\varepsilon x^2+$ etc.$)$ an, welche hier blofs durch das *Monom*, $\sin\gamma$ vorgestellt wird. Dafür dienen in der combinatorischen Zeichnung die Scalen $p[\varepsilon, \gamma, \delta \ldots]$ und $q[\gamma, \delta, \varepsilon \ldots]$ etc.

Anmerk. 2. Noch ein anderer sehr bedeutender Unterschied findet zwischen den β^m in (I und II) statt, dafs nähmlich im letzten Falle die gegebenen, von einander ganz unabhängigen, Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ der Reihe p (II) als veränderlich und von einander abhängig (8, 9) von ARBOGAST angesehen und behandelt werden. Diese Voraussetzung macht daher nach geendeten Differentiationen, bestimmte Substitutionen in $D.\beta$; $D^2.\beta$; $D^3.\beta \ldots$ nöthig (20), die man am schicklichsten der derivativen Function in Form eines Zeigers untersetzen kann, wie oben (46, *c*). Man vergleiche (45, II) und die dortige Note.

Anmerk. 3. Das m in (I und II) kann jede Zahl, positive und negative, ganze und gebrochene, bedeuten; die Formeln in (46; *b*, *c*) sind nämlich für jeden Werth von m anwendbar. Setzt man aber das m in II einer ganzen positiven Zahl gleich: so giebt das die von ARBOGAST sogenannten *quantités polynomiales* (40), *die Coefficienten* nehmlich der entwickelten

Potenzen ganzer positiver Exponenten Polynomieu.

Anmerk. 4. Für bejahte positive m ausser dem (Anm. 3) angeführten combinatorisc Werthe für $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$, auch nachfolgende verkür Formel:

$$\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n} = p^m\varkappa(n+1) = m^{m+n}M$$

$$\begin{pmatrix} D.\beta = 1\gamma \\ D^2.\beta = 1.2\delta \\ D^3.\beta = 1.2.3\varepsilon \\ \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \end{pmatrix} p[\beta, \gamma, \delta..] \begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon... \\ 1, & 2, & 3, & 4... \end{pmatrix}$$

wo für $m = 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots$
dann $M = A\ B\ C\ D\ \ldots$
und $m = a\ b\ c\ b\ \ldots$

zu setzen. Arch. der Math. Heft II. S. 230, 231.

III. Die Polynomialgrössen

$$D.\mathfrak{G}^m, \frac{D^2.\mathfrak{G}^m}{1.2}, \frac{D^3.\mathfrak{G}^m}{1.2.3} \ldots\ldots \frac{D^n.\mathfrak{G}^m}{1.2..n}$$

lassen sich endlich auch als Zeichen von Com nationen betrachten. ARBOGAST bemerkt dieses [54, 4°], behauptet aber [no. 52] die combinatorisc Behandlung und Auflösung dieser Zeichen (z. B. na den Formeln hier, Anmerk. 4; in 46, *b*, *c*; und ander sey weniger leicht und weniger analytis als die derivative. Diesen Ausspruch gehörig zu pr fen, darf man nur die bereits vorgelegte combinat rische Evolutionsformel (39) und ihre Anwendun mit der sogleich aufzuführenden, die Polynomialgrö sen enthaltenden, derivativen Formel (53) und i tem Gebrauche vergleichen.

VIERTER ABSCHNITT.

ARBOGAST's zweyte, die Polynomialgrössen enthaltende, derivative Auflösungsformel des Hauptproblems (20), aus der combinatorischen Localformel (43 und 52, II) abgeleitet.

§. 3. Die von ARBOGAST [no. 20] vorgetragene zweyte Evolutionsformel ist folgende:

I. $\varphi(\alpha+\xi x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.})$

$$=$$

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}+A_n x^n$$

$$= \varphi\alpha$$

$$+\frac{D\varphi\alpha}{1}\cdot\beta x$$

$$+\left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\cdot\xi+\frac{D^2\varphi\alpha}{1\cdot 2}\cdot\beta^2\right)x^2$$

$$+\left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\cdot\frac{D^2.\beta}{1\cdot 2}+\frac{D^2\varphi\alpha}{1\cdot 2}\cdot D.\xi^2+\frac{D^3\varphi\alpha}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\beta^3\right)x^3$$

$$+\left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\cdot\frac{D^3.\beta}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{D^2\varphi\alpha}{1\cdot 2}\cdot\frac{D^2.\xi^2}{1\cdot 2}+\frac{D^3\varphi\alpha}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot D.\beta^3\right.$$

$$\left.+\frac{D^4\varphi\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\beta^4\right)x^4$$

$$\text{s}\quad\text{s}\quad\text{s}\quad\text{s}\quad\text{s}\quad\text{s}\quad\text{s}\quad\text{s}\quad\text{s}\quad\text{s}\quad\text{s}$$

$$\text{also } A_n x^n=\left(\frac{D^n.\varphi\alpha}{1\cdot 2\ldots n}\right)=\frac{D\varphi\alpha}{1}\cdot\frac{D^{n-1}.\xi}{1\cdot 2\ldots n-1}+\frac{D^2\varphi\alpha}{1\cdot 2}\cdot$$

$$\frac{D^{n-2}.\beta^2}{1\cdot 2\ldots n-2}+\frac{D^3\varphi\alpha}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{D^{n-3}.\beta^3}{1\cdot 2\ldots n-3}+\text{etc.}$$

$$+\frac{D^n\varphi\alpha}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{D^{n-n}.\xi^n}{1\cdot 2\ldots n-n}+\text{etc.})\,x^n$$

für den derivativen Zeiger

$$\left[\begin{matrix} \mathrm{D}.\mathfrak{E}, & \mathrm{D}^2.\mathfrak{E}, & \mathrm{D}^3.\mathfrak{E}, & \mathrm{D}^4.\mathfrak{E}, & \mathrm{D}^5.\mathfrak{E}, & \ldots \\ 1\gamma, & 1.2\delta, & 1.2.3\varepsilon, & 1.2.3.4\zeta, & 1.2.3.4.5\eta, & \ldots \end{matrix}\right.$$

Der hier beygefügte derivative Index zeigt nehmli was nach geendeten Derivationen, durch Differentiati

bey den Polynomialgrössen $\frac{\mathrm{D}^n.\mathfrak{E}^m}{1.2..n}$ (51, III) statt d

$\mathrm{D}^1.\mathfrak{E}$, $\mathrm{D}^2.\mathfrak{E}$, $\mathrm{D}^3.\mathfrak{E}$ ... zu setzen sey (45, II. Note

Auch ist $\frac{\mathrm{D}^{n-n}.\mathfrak{E}^n}{1.2..n-n}$ d. i. $\frac{\mathrm{D}^0.\mathfrak{E}^n}{0} = \mathfrak{E}^n$.

II. Ordnete man die Glieder der Coefficienten, w sie kommen würden, wenn man die hiesigen rückwärt schriebe, so fände man A_n oder

$$\frac{\mathrm{D}^n.\varphi\alpha}{1.2..n} = \frac{\mathrm{D}^n\varphi\alpha}{1.2..n}.\mathfrak{E}^n + \frac{\mathrm{D}^{n-1}\varphi\alpha}{1.2..n-1}.\mathrm{D}.\mathfrak{E}^{n-1} + .$$

$$+\mathrm{D}\varphi\alpha\,\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\mathfrak{E}}{1.2..n-1}$$

diese derivativen Ausdrücke von $\mathfrak{E}^n, \mathfrak{E}^{n-s}$ in combinat rische umzusetzen, dürfte man nur die zugehörig $\mathfrak{a}^n\mathrm{A}, \mathfrak{b}^n\mathrm{B}, \mathfrak{c}^n\mathrm{C}, \ldots \mathfrak{n}^n\mathrm{N}$ (56, III) rückwärts schreiben.

54. Beweis. Die Formel (52, II)

$$\frac{p^m x(n+1)}{p[\beta, \gamma, \delta..]} = \frac{\mathrm{D}^n.\mathfrak{E}^m}{1.2..n}$$

wenn man darinn

für	nach und nach
$m=1$	$n=0, 1, 2, 3, 4 \ldots$
$m=2$	$n=0, 1, 2, 3, 4 \ldots$
$m=3$	$n=0, 1, 2, 3, 4 \ldots$
.	. . . .

setzt, giebt;

$1 = \mathfrak{C}$	$p^2 \times 1 = \mathfrak{C}^2$	$p^3 \times 1 = \mathfrak{C}^3$ etc.
$2 = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}$	$p^2 \times 2 = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}^2$	$p^3 \times 2 = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{C}^3$ etc.
$3 = \frac{\mathfrak{D}^2 \cdot \mathfrak{C}}{1 \cdot 2}$	$p^2 \times 3 = \frac{\mathfrak{D}^2 \cdot \mathfrak{C}^2}{1 \cdot 2}$	$p^3 \times 3 = \frac{\mathfrak{D}^2 \cdot \mathfrak{C}^3}{1 \cdot 2}$ etc.
$4 = \frac{\mathfrak{D}^3 \cdot \mathfrak{C}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$p^2 \times 4 = \frac{\mathfrak{D}^3 \cdot \mathfrak{C}^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$p^3 \times 4 = \frac{\mathfrak{D}^3 \cdot \mathfrak{C}^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ etc.
, ,	, ,	, , etc.

lso kommt, diese derivativen Ausdrücke an die lle der gleichgültigen localen, in die Localfor- l (43) substituirt, die Evolutionsformel (53). Die rgleichung dieser Formel mit der combinatorischen 9) zeigt das Verhalten der derivativ- und com- natorisch ausgedrückten Polynomialgrössen mit iem Blick. Die allgemeine Formel dafür steht (52, Anmerk. 4); eine weitere Zerlegung der letztern 6, *c*).

55. Einen andern Beweis von dem Satze (53) rmöge der derivativ ausgedrückten Werthe der Po- nzen p^1, p^2, p^3, p^4 . . . (54) und der Substitution ser Werthe in die einzelnen Glieder der Taylori- hen Evolutionsformel, hat ARBOGAST (no 21) ge- ben. Dieses Verfahren stimmt im Wesentlichen mit m meinigen (in 42) überein, nur dafs bey mir com- natorische Ausdrücke statt derivativer gebraucht wer- n, auch das dabey angewendete Verfahren (*Metho- s potentiarum*) die weitläuftige Substitution und Re- uction ersparen hilft, und so die Glieder in (53) gleich it geordnet giebt. Die derivative Form ist nämlich enn man davon Gebrauch in der Anwendung machen ll, keiner so unmittelbar leichten Auflösung hig, als die combinatorische; obschon in [no. 52] s Gegentheil versichert wird. Mehr davon, im 6ten schnitte.

56. I. In dem Satze (53) kommen zweyer derivativ ausgedrückte Gröfsen vor; die, von der Fu ction $\varphi\alpha$ abhängigen successiven ganz einfachen Deri tionen $\frac{D^n \varphi\alpha}{1,2..n}$ (ohne Punct nach D^n) für $D\alpha =$ also $D^2\alpha = D^3\alpha$, u. s. w. $= 0$; und die weit verwick tern $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$ (mit einem Puncte nach D^n), wo $D.$ $D^2.\mathfrak{E}$; $D^3.\mathfrak{E}$; . . . und alle höhere Differentiale zug lassen werden (16). Die Werthe dieser Polynomi grössen für bestimmte n und m, durch wirkliche su cessive Differentiation und Substitution der zugehör gen Werthe für die $D.\mathfrak{E}$, $D^2.\mathfrak{E}$, $D^3.\mathfrak{E}$... (nach dem Zeig in 53) suchen wollen, würde zu verdrüfslichen u unübersehlichen Weitläuftigkeiten führen (17).

II. Wie sich diese Schwierigkeiten, durch d Gebrauch combinatorischer Zeichen und Operation beträchtlich vermindern lassen, zeigt die Formel (4 II) wenn man darinn β^m statt φx, und in den Zeig β statt x setzt. Auch wird (in V. a. a. O.) gewies wie man durch eine schickliche Substitution der Wer für $D.\mathfrak{E}$: $D^2.\mathfrak{E}$; $D^3.\mathfrak{E}$ ..., nicht in die Formel, sond in den Zeiger, die Schwierigkeiten ganz aufhel könne. Dadurch wird man auf die combinatoris Formel (39) geleitet.

III. Man kann das auch so (ohne jene Sätze) der Kürze übersehen. Man setze in die Gleichu (Arch. d. Math. H. II. S. 230, 231, §. 7 und 8, II) üb all D, β statt d, z, so erhält man

$$\frac{D^n.\mathfrak{E}^m}{1.2..n} = \mathfrak{m}^{m+n}\mathrm{M}\left(\mathfrak{E}, \frac{D.\mathfrak{E}}{1}, \frac{D^2.\mathfrak{E}}{1.2}, \frac{D^3.\mathfrak{E}}{1.2.3}, \ldots\right)$$

den combinatorischen Ausdruck für die n^{te} *Derivée* [illegible] $\frac{D^n.\mathfrak{E}^m}{1.2..n}$, oder das n^{te} Differential von β

durch $1.2..n$ dividirt, worinn m und M allgemeine m^{te} Polynomialcoefficienten und Classen bedeuten; also (wie in 52, II, Anm. 4)

für $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$
dann $M = A, B, C, D \ldots$
und $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \ldots$

Nun setze man

für n	m	so findet man dadurch
erstens $n-1$	1	$\frac{D^{n-1}.\mathfrak{C}}{1.2..n-1} = \mathfrak{a}^n A$
zweytens $n-2$	2	$\frac{D^{n-2}.\mathfrak{C}^2}{1.2..n-2} = \mathfrak{b}^n B$
drittens $n-3$	3	$\frac{D^{n-3}.\mathfrak{C}^3}{1.2..n-3} = \mathfrak{c}^n C$
viertens $n-4$	4	$\frac{D^{n-4}.\mathfrak{C}^4}{1.2,.n-4} = \mathfrak{d}^n D$
⁂ ⁂	⁂	⁂ ⁂ ⁂
$n-n$	n	$\frac{D^{n-n}.\mathfrak{C}^n}{1.2..n-n} = \mathfrak{n}^n N$

so also auch die

$$\mathfrak{a}^n A \quad \mathfrak{b}^n B \quad \mathfrak{c}^n C \quad \mathfrak{d}^n D \ldots \mathfrak{n}^n N$$

auf den Zeiger

$$\left(1, \frac{2}{D.\mathfrak{C}}, \frac{3}{D^2.\mathfrak{C}}, \frac{4}{D^3.\mathfrak{C}}, \frac{5}{D^4.\mathfrak{C}}, \ldots\right)$$

sich beziehen und dadurch sich ausdrücken lassen. Auch ist $\mathfrak{n}^n N = \frac{D^0\,\mathfrak{C}^n}{0} = \mathfrak{C}^n$.

IV. Das giebt alle Bequemlichkeit, die man nur wünschen kann, in so fern $\mathfrak{C}^m$ ein blofses *Monomium* ist. Steht aber nach ARBOGAST's Zeichnung und Bedeutung (52, II, Anm. 1) $\mathfrak{C}^m$ für $(\mathfrak{C}+\gamma x+\delta x^2+\text{etc.})^m$, so tritt hierbey *zugleich* die Nothwendigkeit der Sub-

stitution von 17; 1.2$\mathfrak{d}$; 1.2.3$\mathfrak{e}$;... für $\mathfrak{b}.\mathfrak{c}$; $\mathfrak{b}^2$ $\mathfrak{a}^3.\mathfrak{c}$: . . . (das. Anm. 2) ein; und so würde man grofse Weitläuftigkeit verfallen, wenn man diese Di rentiale, nach obigem Zeiger, zuerst in $\mathfrak{a}^n$A, $\mathfrak{b}^n$B, $\mathfrak{c}^n$C, schaffen, und nachher jene Substitution darinn vorn men wollte. Man macht diese Substitution vielmehr jenen Zeiger selbst, und erhält dadurch

$$\mathfrak{a}^n A \quad \mathfrak{b}^n B \quad \mathfrak{c}^n C \quad \mathfrak{b}^n D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathfrak{n}^n N$$

auf den ganz einfachen Zeiger

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{y} & \mathfrak{d} & \mathfrak{e} & \mathfrak{z} & \mathfrak{y} & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & . & . & . \end{pmatrix}$$

bezogen. Man vergleiche die Formel (52, II, Anm. 4

V. Die $\mathfrak{a}^n$A, $\mathfrak{b}^n$B, $\mathfrak{c}^n$C, . . . für diesen e fachen Zeiger, kommen in der Formel (45, II) f den $(n+1)$ten Coefficienten der Reihe für $\varphi(\alpha+$ $+\gamma x^2+$ etc.), vor. Setzt man darinn nach und n $n=1,2,3,4,..$ so erhält man die combinatorisc Formel (39); und so auch die derivative (53) we man diese successiven Werthe von n, in das n derivativen Ausdrücke (III) setzt. Die combinat sche Evolutionsformel läfst sich nicht weiter simplificir weil bey der übergrofsen Leichtigkeit der Darstellu der Complexionen von $\mathfrak{a}^n$A, $\mathfrak{b}^n$B, $\mathfrak{c}$ C, . . . nichts wünschen übrig bleibt. Man sehe den ersten Anha

V. Es ist übrigens bemerkenswerth, dafs die V meidung der Schwierigkeiten, welche die derivativ Ausdrücke, durch continuirliche Differentiationen, s welche sie hinweisen, hier in den Weg stellen, so g rade zu und ungezwungen auf combinatorische Verfa ren führt; eine Bemerkung, die weiterhin von ein andern Seite neue Bestätigung erhalten wird.

FÜNFTER ABSCHNITT.

ARBOGAST's Auflösung seiner derivativen Evolutionsformel (53) führt auf Substitutionen. Die Weitläuftigkeit dieses, von TETENS schon gebrauchten, Verfahrens wird aber zuletzt durch kurze, daraus abgeleitete, verbale Vorschriften (Règles) rein combinatorischen Inhalts wieder compensirt, und so die letztern statt der erstern gebraucht. Einige gemeinschaftliche Berührungspuncte des Derivationscalculs mit der combinatorischen Analysis.

---

7. Wie in der combinatorischen Analysis 1) spätere der folgende Glieder und Coefficienten, aus frühern, unmittelbar vorhergehenden, sich ableiten, der 2) für sich und ausser der Ordnung, in allen übrigen vorhergehenden (oder folgenden) abhängig darstellen, und zwar, in beyden Fällen, bereits ganz reducirt und in der einfachsten Gestalt, anordnen lassen (29 und die dortige Note 9): so hat auch ARBOGAST diese Vollendung auf derivativen Wegen bey dem Gebrauche seiner Formel (53) zur Absicht gehabt. [no. 24. u. f. no. 40 u. f.]

Derivative Ableitung folgender Coefficienten aus zunächst vorhergehenden, und umgekehrt.

58. I. Dafür wird zuerst [no 24] eine leichte Regel aufgestellt, wie man aus einem gegebenen Coefficienten der Reihe (53) z. B. aus

$$\frac{D\varphi\alpha}{1}\cdot\frac{D^2.\mathfrak{C}}{1.2}+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\cdot D.\mathfrak{C}^2+\frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}\cdot\mathfrak{C}^3$$

den unmittelbar folgenden

$$\frac{\mathrm{D}\varphi x}{1}\cdot\frac{\mathrm{D}^3.\xi}{1.2.3}+\frac{\mathrm{D}^2\varphi x}{1.2}\cdot\frac{\mathrm{D}^2.\xi^2}{1.2}+\frac{\mathrm{D}^3\varphi x}{1.2.3}\cdot\mathrm{D}.\xi^3+\frac{\mathrm{D}^4\varphi x}{1.2.3.4}\xi^4$$

und so für jeden andern gegebenen Coefficienten i zunächst folgenden, deriviren könne,

II. In diesen Formeln machen die von φx hängigen einfachen Derivationen $\frac{\mathrm{D}^n\varphi x}{1.2..n}$ keine Schw rigkeit, wohl aber die verwickelten Polynomialgröfs $\frac{\mathrm{D}^n.\xi^m}{1.2..n}$; wobey man durch fortgesetzte Differenti tionen, und hinterher zu machende Substitution (56. I.) in verdrüfsliche und gar bald unübersehlic Weitläuftigkeiten gerathen würde. Wie sich di Schwierigkeiten durch combinatorische Zeichnung u Verfahren gründlich heben lassen, ist ebendasel (II — V) gezeigt worden. Arbogast, der von cc binatorischen Zeichen ganz abstrahirt, hat sich dal verhalten, wie folget.

III. Die Polynomialgröfsen, die ξ enthalten, entwickeln, vergleiche man ihren allgemeinen A druck $\frac{\mathrm{D}^n.\xi^m}{1.2..n}$, mit jenem $\frac{\mathrm{D}^n.\varphi x}{1.2..n}$. Hier nun st ξ statt x, der Exponent m statt des Functionalzeich φ, und $\gamma=\mathrm{D}.\xi$ ist als das erste Glied des Polyno $\gamma+\delta x+\varepsilon x^2+$ etc. anzusehen; und so folgt aus (53 diese erste Evolutions-Formel

$$\frac{\mathrm{D}^n.\xi^m}{1.2..n}=\mathrm{D}\xi^m.\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\gamma}{1.2..n-1}+\frac{\mathrm{D}^2\xi^m}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.\gamma^2}{1.2..n-2}+\mathrm{et}$$
$$+\frac{\mathrm{D}^{n-1}\xi^m}{1.2..n-1}.\mathrm{D}.\gamma^{n-1}+\frac{\mathrm{D}^n.\xi^m}{1.2..n}\gamma^n$$

[redacted], in dem besondern Falle, für $n=3$, ist

$$\frac{D^3.\xi^m}{1..3} = D\xi^m.\frac{D^2.\gamma}{1.2} + \frac{D^2\xi^m}{1.2}.D.\gamma^2 + \frac{D^3\xi^m}{1.2.3}.\gamma^3$$

und die *Derivée* davon [no. 24]

$$\frac{D^4.\xi^m}{1.2.3.4} = D\xi^m.\frac{D^3.\gamma}{1.2.3} + \frac{D^2\xi^m}{1.2}.\frac{D^2.\gamma^2}{1.2} + \frac{D^3\xi^m}{1.2.3}.D.\gamma^3 + \frac{D^4\xi^m}{1.2.3.4}.\gamma^4$$

In jedem obigen Werthe der schwierigen Derivation $\frac{D^n.\xi^m}{1.2..n}$, sind nun die Derivationen, die ξ enthalten, $D\xi^m$, $\frac{D^2\xi^m}{1.2}$, $\frac{D^3\xi^m}{1.2.3}$, ... alle leicht, und die Schwierigkeit ist auf die, die γ enthalten, $\frac{D^{n-1}.\gamma}{1.2..n-1}$, $\frac{D^{n-2}.\gamma^2}{1.2..n-2}$, ... übergetragen, aber auch da schon um einen Grad vermindert, weil darunter $\frac{D^{n-1}.\gamma}{1.2..n-1}$ der höchste ist.

IV. Eben so kann man, durch Vergleichung mit der Formel (III) vermöge einer daraus abgeleiteten zweyten Evolution, die $\frac{D^{n-1}.\gamma}{1.2..n-1}$, $\frac{D^{n-2}\gamma^2}{1.2..n-2}$, ... weiter in Derivationen, die γ und δ enthalten, zerlegen, wo die $D\gamma^m$, $\frac{D^2\gamma^m}{1.2}$, ... alle leicht, und die Schwierigkeiten, auf die die δ enthalten, wieder mit Verminderung eines Grades (die höchste Derivation ist nun $\frac{D^{n-2}.\delta}{1.2..n-2}$) übergetragen sind; und durch diese stufenweise Verminderung werden endlich die Schwierigkeiten ganz aufgelöset.

V. Überhaupt stellt die obige Reductionsformel für $\frac{D^n.\xi^m}{1.2..n}$ in (III) die erste Evolution, in γ dar;

daraus folgt (IV) die zweyte, in δ; und so die dritte, in ε; und die vierte, in ζ; u.s.w. indem man nach und nach $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$ statt β; und $\delta, \varepsilon, \zeta, \eta \ldots$ statt γ dabey braucht, und $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$ nach und nach als erste Glieder eines nach Potenzen einer veränderlichen Gröfse fortgehenden Polynoms betrachtet.

VI. Erste Evolution wird diejenige genannt, in welcher ein Buchstabe mehr vorkommt, als in der zu evolviren gegebenen Gröfse, wie oben die Derivation $\frac{\mathrm{D}^n \mathfrak{G}^m}{.2..n}$, worinn nur $\mathfrak{G}$ vorkommt, durch Derivationen, worinn $\mathfrak{G}$ und γ vorkommen, ausgedrückt wird. Eben so werden zweyte, dritte; vierte Evolution u.s.w. genannt, die zwey, drey, vier u.s.w. mit dem Zeichen D verbundene Buchstaben mehr enthalten. So wird man nach und nach von einer Evolution zur andern geleitet, wo immer mehr solcher Buchstaben zum Vorschein kommen, bis man, durch alle hindurch, endlich zur letzten gelangt, in welcher kein Buchstabe mehr mit dem Derivations-Zeichen D behaftet ist, sondern alles in $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$ in der einfachsten Gestalt und zugleich gut geordnet, ausgedrückt erscheint; weshalb diese Entwickelung auch die vollständige, ganz reducirte (*Développement complet, réduit*), genannt wird [no. 25]. Sie ist dieselbe, dem Ausdrucke und der Folge ihrer Glieder nach, auf welche die combinatorischen $\mathfrak{a}^n\mathrm{A}$, $\mathfrak{b}^n\mathrm{B}$, $\mathfrak{c}^n\mathrm{C}\ldots$ geradezu, ohne alle Umwege, führen.

VII. Die Evolution der Polynomialgröfsen $\frac{\mathfrak{b}^n.\beta^m}{1.2..n}$, $\frac{\mathfrak{b}^l.\gamma^m}{1.2..l}$ hört mit dem Gliede auf, in welchem der zweyte Factor von dem Derivations-Zeichen D befreyt ist. So ist von $\frac{\mathrm{D}^3\mathfrak{G}^6}{1.2.3}$ das letzte Glied der Evolution, $\frac{\mathrm{D}^3\mathfrak{G}^6}{1.2.3}.\gamma^3$, und von der zu evolvirenden Gröfse

$\frac{D^4.\gamma^6}{1.2.3.4}$ das letzte Glied, $\frac{D^4\gamma^6}{1.2.3.4}.\delta^4$. Ferner $\frac{D^m\varepsilon^m}{1.2..m} = \frac{D^m\gamma^m}{1.2..m} = \text{etc.} = 1$; auch $D\varepsilon = D\gamma = D\delta = Ds = \text{etc.} = 1$; ingleichen $\frac{D^n.\gamma}{1.2..n} = \frac{D^{n-1}.\delta}{1.2..n-1} = \text{etc.}$ olglich z. B. $\frac{D^4.\gamma}{1.2.3.4} = \frac{D^3.\delta}{1.2.3} = \frac{D^2.s}{1.2} = D.\zeta = \eta$ no. 26]

VIII. So weicht ARBOGAST den schwierigen continuirlichen Differentiationen, auf welche die Ausdrücke $\frac{D^n.\varepsilon^m}{1.2..n}$ hinweisen, [no. 17; 56, I] durch continuirliche, von der Reductionsformel (III) abhängige, Substitutionen aus, durch deren mehrmalige, nicht selten sehr vielfache, Anwendung man endlich zu ganz einfachen vollständig reducirten und gut geordneten Ausdrücken (Complexionen) gelangt (VI). In der Tafel zuletzt im zweyten Anhange dieser Abhandlung [auch no. 27. p. 20, 21] findet man der Gröfsen $\frac{D^5.\varepsilon^4}{1.2..5}$ und $\frac{D^6.\varepsilon^4}{1.2..6}$ successive Entwickelung oder Evolution in $\gamma, \delta, s, \zeta \ldots$ durch continuirliche Substitution, bis zur letzten vollständig reducirten, deutlich ausgeführt, so dafs diese beyden Schemata die vollständigsten Belege für eine solche Behandlung abgeben. So weitläufig auch übrigens an sich diese Substitutionen wirklich sind, so sind sie es doch weniger, als die zugehörigen Differentiationen, und hinterher zu machende Austauschungen (II) an ihrer Stelle seyn würden.

59. Exempel zu (58)

Zu der ersten Evolution, in γ, der Gröfse

$$\frac{D^6.\varepsilon^4}{1.2..6} = D\varepsilon^4.\frac{D^5.\gamma}{1.2..5} + \frac{D^2\varepsilon^4}{1.2}.\frac{D^4.\gamma^2}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wie solche die Reductionsformel (58, III) für $n=$ und $m=4$ giebt, die zweyte Evolution, in δ finden.

Hier ist klar, dafs man nur $\frac{D^5.\gamma}{1.2.3..5}$, $\frac{D^4.\gamma^2}{1.2.3.4}$ e (die Ausdrücke mit einem Puncte nach D) weiter entwickeln braucht. Man setze also in (58, III)

1) $n=5$, $m=1$, statt $\mathfrak{G}$, γ aber γ, δ, so kommt

$$\frac{D^5.\gamma}{1.2..5} = D\gamma.\frac{D^4.\delta}{1.2.3.4} = \frac{D^4.\delta}{1.2.3.4}$$ (58, VI

2) $n=4$, $m=2$, statt $\mathfrak{G}$, γ wieder γ, δ, so erhält m

$$\frac{D^4.\gamma^2}{1.2.3.4} = D\gamma^2.\frac{D^3.\delta}{1.2.3} + \frac{D^2.\gamma^2}{1.2}.\frac{D^2\delta^2}{1.2}$$

Die gefundenen Zerlegungen dieser beyden *Dérivé* statt ihrer in die erste Evolution substituirt, giebt zweyte, in δ

$$D\mathfrak{G}^4.\frac{D^4.\delta}{1.2.3.4} + \frac{D^2.\mathfrak{G}^4}{1.2}\left\{\begin{array}{l} D\gamma^2.\frac{D^3.\delta}{1.2.3} \\ + \frac{D^2\gamma^2}{1.2}.\frac{D^2.\gamma^2}{1.2} \end{array}\right. +$$

Man sehe die angef. Taf. im zweyten Anhange, [no. 27. p. 20].

60. Diese sinnreiche Deduction von derivat immer einfachern Zerlegungen für diePolynomialgrö aus einer einzigen Formel, ist gleichwohl nicht, es scheinen könnte, dem Derivations-Calcul ausschl lich eigen. Derselben Substitutionen in Substitutio zu demselben Zwecke, um alles dadurch zuletzt einfach und gut geordnet, ausgedrückt, darzustel hat sich bereits der Etatsrath TETENS, in seiner *Fo lynomiorum* (Sml I. S 1. f.) bedienet. Meh dungen dieses Verfahrens in verschiedenen

pmpeln, kommen (das. S. 15—21) vor; wobey noch zu bemerken, dafs TETENS durchgängig bey den beyden ersten Classen: a^nA, b^nB, als für sich klaren, oder leicht erklärlichen und ihrem Werthe nach angeblichen (das. S. 9. §. 5) stehen bleibt, ARBOGAST hingegen durchaus alle mit dem Zeichen Δ behaftete Gröfsen zerlegt, bis dieser derivative Charakter ganz verschwunden ist. Eine sorgfältige Analyse des Tetenschen Verfahrens, mit Vergleichung und Reduction seiner Zeichen auf die combinatorischen, habe ich in den Anmerkungen zu jener Abhandlung an mehreren Orten, und noch ausführlicher (Ebendas. S. 250—254) im Zusammenhange vorgetragen. Hoffentlich wird die dort (S. 252) vorgelegte anschauliche Darstellung in meinen Zeichen, und deren combinatorische Auflösung (S. 253) viel dazu beytragen: TETENS Substitutionsmethode, und dadurch auch die ARBOGASTISCHE, in der Kürze zu übersehen.

61, Eine, der derivativen Reductionsformel (58, II) vollkommen gleichgültige und identische, folglich auch mit dem Tetenschen und Arbogastischen Substitutionsverfahren (60) übereinstimmende, combinatorische Formel, habe ich bereits vorlängst (*Nov. Syst. Perm. p.* LV, 9) nachgewiesen. Man vergleiche Sml. I. S. 236; Arch. d. Math. H. II. S. 230, 231; oder hier (52, II, Anmerk. 4).

Es ist nämlich, für $\mathfrak{G}+\gamma x+\delta x^2+\varepsilon x^3+$ etc. $=p$, der $(n+1)^{te}$ Coefficient der ganzen positiven Potenz m von p, d. i. $p^m\varkappa(n+1)$, oder die m^{te} Combinations-Classe M zur Summe $m+n$ mit den zugehörigen Polynomial-Coefficienten $\mathfrak{m}$ versehen, d. i.

$$\mathfrak{m}^m + {}^pM = {}^m\mathfrak{X}\mathfrak{G}^{m-1}{}_a{}^nA + {}^m\mathfrak{Y}\mathfrak{G}^{m-2}{}_b{}^nB + {}^m\mathfrak{Z}\mathfrak{G}^{m-3}{}_c{}^nC + \text{etc.},$$

$$\begin{pmatrix}\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\ldots\\ 1,2,3,4,\ldots\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta\ldots\\ 1,2,3,4,5\ldots\end{pmatrix}$$

Die Glieder rechter Hand brechen mit demjenigen
wo zuerst die Zahl des Binomial-Coefficienten
grofs wie m, oder die der Classe so grofs wie n
Auch erhellet, dafs diese Formel einzelne höhe
Classen der Potenzen durch Summen von nied
gern Classen giebt, eben so, wie die Derivations-F
mel (58, III) einzelne höhereDerivationen durch Su
men von niedrigern ausdrückt.

62. Demnach ist (58, III)

$$\frac{D^n.\mathfrak{G}^m}{1.2..n} = m^{m+n}M$$

$$\left[\begin{array}{l} D.\mathfrak{G} = 1\,\gamma \\ D^2.\mathfrak{G} = 1.2\,\delta \\ \quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots \end{array}\right] \qquad \left(\begin{array}{cccc} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon\ldots \\ 1, & 2, & 3. & 4\ldots \end{array}\right)$$

ingleichen

$$D\mathfrak{G}^m.\frac{D^{n-1}.\gamma}{1.2..n-1}+\frac{D^2\mathfrak{G}^m}{1.2}.\frac{D^{n-2}.\gamma^2}{1.2..n-2}+\frac{D^3\mathfrak{G}^m}{1.2.3}.\frac{D^{n-3}.\gamma}{1.2..n}+$$

$$\left[\begin{array}{cccc} D.\gamma & D^2.\gamma & D^3.\gamma & D^4.\gamma\ldots \\ 1.\delta & 1.2.\varepsilon & 1.2.3\zeta & 1.2.3.4\eta\ldots \end{array}\right]$$

$$= {}^m\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}^{m-1}\mathfrak{a}^nA + {}^m\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}^{m-2}\mathfrak{b}^nB + {}^m\mathfrak{C}\,\mathfrak{G}^{m-3}\mathfrak{c}^nC + \text{etc.}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta\ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \end{array}\right)$$

und

$$D^1\mathfrak{G}^m = {}^m\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}^{m-1} \qquad \frac{D^{n-1}.\gamma}{1.2..n-1} = \mathfrak{a}^nA$$

$$\frac{D^2\mathfrak{G}^m}{1.2} = {}^m\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}^{m-2} \qquad \frac{D^{n-2}.\gamma^2}{1.2..n-2} = \mathfrak{b}^nB$$

$$\frac{D^3\mathfrak{G}^m}{1.2..3} = {}^m\mathfrak{C}\,\mathfrak{G}^{m-3} \qquad \frac{D^{n-3}.\gamma^3}{1.2..n-3} = \mathfrak{c}^nC$$

$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots \qquad \vdots\quad\vdots\quad\vdots$$

$$\mathfrak{G}^m = {}^m\mathfrak{N}\,\mathfrak{G}^{m-n} \qquad \frac{D^{n-n}.\gamma^n}{1.2..n-n} = \mathfrak{n}^nN$$

r denselben derivativen und combinatorischen Zeiger, e gleich vorher.

Dies wäre also eine vollständige Vergleichung der rivativen und combinatorischen Reductionsformel 8, III und 61) und ihrer Elemente, nach welcher n eine sogleich in die andere umsetzen und verwanln kann.

60. Es wird der Mühe werth seyn, auch eine vereichende Darstellung der aus diesen Formeln fliefsenn Verfahren, von mir, von TETENS und von ARBOST vorzulegen. Ich will dazu den Arbogastischen usdruck $\frac{D^5.\mathfrak{G}^4}{1.2..5}$ (62, für $n=5$; $m=4$) gebrauchen, er mit meinem $\mathfrak{d}^9D = \mathfrak{d}^{4+5}D$ gleichgeltend ist; der eiger sey wie am angef. O.

Auflösung von $\frac{D^5.\mathfrak{G}^4}{1.2..5} = \mathfrak{d}^{4+5}D = \mathfrak{d}^9D$

I. Nach HINDENBURGS Verfahren hat man die ahl, ob man 1) die Entwickelung nach $\left(\begin{matrix}\mathfrak{d}^9D\\ \mathfrak{G},\gamma,\delta\ldots\\ 1,2,3,..\end{matrix}\right)$ ne alle weitere Zerlegung in niedrigere Classen soich vornehmen; oder 2) dafür die Reductions-Forl (61, 62)

$$\left(\begin{matrix}\mathfrak{d}^{4+5}D\\ \mathfrak{G}\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\end{matrix}\right) =$$

$$= {}^4\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}^3\mathfrak{a}^5A + {}^4\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}^2\mathfrak{b}^5B + {}^4\mathfrak{C}\,\mathfrak{G}^1\mathfrak{c}^5C + {}^4\mathfrak{D}\,\mathfrak{G}^0\mathfrak{d}^5D$$

$$\left(\begin{matrix}\gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{matrix}\right)$$

brauchen; oder endlich 3) auch die Classen ^5A, ^5B, ^5D, des letzten Ausdrucks noch weiter, mit gehöriger *Abänderung des Zeigers*, zerlegen will.

Im ersten Falle erhält man, wenn man die Co
plexionen von ^{9}D, für den obigen Zeiger, eben so
bey ^{10}D (Sml. I. S. 187, 188) für den dortigen ablei

$$\mathfrak{d}^{9}D \begin{pmatrix} \varepsilon\,\gamma\,\delta\ldots \\ 1\,2\,3\ldots \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 4\varepsilon^{3}\eta + 12\varepsilon^{2}\gamma\zeta + 12\varepsilon^{2}\delta\varepsilon \\ + 12\varepsilon\gamma^{2}\varepsilon + 12\varepsilon\gamma\delta^{2} + 4\gamma^{3}\delta \end{matrix} \right\}$$

Im zweyten Falle, wo (nach obigem Zeige
$\mathfrak{a}^{5}A = \eta$; $\mathfrak{b}^{5}B = 2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon$; $\mathfrak{c}^{5}C = 3\gamma^{2}\varepsilon + 3\gamma\delta^{2}$; $\mathfrak{d}$
$= 4\gamma^{3}\delta$; kommt

$$\mathfrak{d}^{4+5}D \begin{pmatrix} \varepsilon\,\gamma\,\delta\ldots \\ 1\,2\,3\ldots \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 4\varepsilon^{3}.\eta + 6\varepsilon^{2}[2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon] \\ +4\varepsilon^{1}[3\gamma^{2}\varepsilon + 3\gamma\delta^{2}] + 4\gamma^{3}\delta \end{matrix} \right\}$$

Im dritten Falle könnte man die weitere Zer
gung so weit verfolgen, bis man alles in ersten und zw
ten Classen ausgedrückt hätte, wie TETENS; oder m
könnte alles bis aufs letzte zerlegen, wie ARBOGA
Davon in den beyden sogleich folgenden Num
(II, III).

II. TETENS Verfahren, in combinatorisc
Zeichen ausgedrückt, würde für

$$\mathfrak{d}^{4+5}D \begin{pmatrix} \varepsilon, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \end{pmatrix}$$

folgendes geben:

$$\begin{aligned} &{}^{4}\mathfrak{A}\varepsilon^{3}.\mathfrak{a}^{5}A \\ +\ &{}^{4}\mathfrak{B}\varepsilon^{2}.\mathfrak{b}^{5}B \\ +\ &{}^{4}\mathfrak{C}\varepsilon^{1}.\mathfrak{c}^{5}C = {}^{4}\mathfrak{C}\varepsilon^{1}. \left\{ \begin{matrix} {}^{3}\mathfrak{A}\gamma^{2}.\mathfrak{a}^{2}A \\ {}^{3}\mathfrak{B}\gamma.\mathfrak{b}^{2}B \end{matrix} \right. \\ +\ &{}^{4}\mathfrak{D}\varepsilon^{0}.\mathfrak{d}^{5}D = {}^{4}\mathfrak{D}\varepsilon^{0}.\ {}^{4}\mathfrak{A}\gamma^{3}.\mathfrak{a}^{1}A \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta \\ 3, & 4, & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \delta, & \varepsilon \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$$

Setzt man nun statt der zwey letztern Ausdrücke linker Hand des Gleichheitszeichens, die gleichgültigen weitern Zerlegungen rechter Hand, so erhält man

$$\begin{array}{l|l} {}^{4}\mathfrak{A}\,\mathfrak{E}^{3}.\,\mathfrak{a}^{5}\mathrm{A} & +\,{}^{4}\mathfrak{C}\,\mathfrak{E}^{1}.\left\{\begin{matrix}{}^{3}\mathfrak{A}\,\gamma^{2}.\mathfrak{a}^{2}\mathrm{A}\\ {}^{3}\mathfrak{B}\,\gamma.\mathfrak{b}^{2}\mathrm{B}\end{matrix}\right\} \\ +\,{}^{4}\mathfrak{B}\,\mathfrak{E}^{2}.\mathfrak{b}^{5}\mathrm{B} & +\,{}^{4}\mathfrak{D}\,\mathfrak{E}^{0}.{}^{4}\mathfrak{A}\,\gamma^{3}.\mathfrak{a}^{1}\mathrm{A} \\ \left(\begin{matrix}\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta\\ 1,2,3.4,5\end{matrix}\right) & \left(\begin{matrix}\delta,\varepsilon\\ 1,2\end{matrix}\right) \end{array}$$

alles in ersten und zweyten Classen: $\mathfrak{a}^{5}\mathrm{A}, \mathfrak{b}^{5}\mathrm{B}$; $\mathfrak{a}^{2}\mathrm{A}, \mathfrak{b}^{2}\mathrm{B}$; $\mathfrak{a}^{1}\mathrm{A}$; (deren Werthe oder Complexionen man sogleich übersieht,) ausgedrückt; und so kommt;

$$\mathfrak{b}^{4+5}\mathrm{D} = \left\{\begin{matrix}4\mathfrak{E}^{3}.\eta + 5\mathfrak{E}^{2}.[2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon \\ +\,4\mathfrak{E}^{1}.[3\gamma^{2}.\varepsilon + 3\gamma.\delta^{2}] + \gamma^{3}\delta\end{matrix}\right\}$$

(mit obigen Zeiger)

III. ARBOGAST's schon vorhin (58, III—VII; 59) gelautertes Verfahren, findet man namentlich für $\frac{\mathrm{D}^{5}.\mathfrak{E}^{4}}{1.2..5} = \mathfrak{b}^{4+5}\mathrm{D} = \mathfrak{b}^{9}\mathrm{D}$ in einer besondern Tafel im zweyten Anhange umständlich in 5 Columnen ausgeführt, welchem die 6te und letzte (das *Développement réduit* enthaltend) beygefügt ist. Ich muſs auf diese Columnen hier verweisen. Die reducirten Glieder der letzten erscheinen genau in eben der Ordnung und Folge, wie bey mir und TETENS in (I, II). Ein anderes Beyspiel $\frac{\mathrm{D}^{5}.\mathfrak{E}^{4}}{1\ 2..6} = \mathfrak{b}^{4+6}\mathrm{D} = \mathfrak{b}^{10}\mathrm{D}$ findet man in eben der Tafel von ARBOGAST ausgeführt. Für die combinatorische Entwickelung hätte man dafür wieder dieselbe dreyfache Wahl, wie in (I).

64. Die Tetensche Evolutionsformel (Sml. I, S. 13) für Potenzen, und die Arbogastische (53) überhaupt für Functionen der Reihen, setzen eine mehrmalige oft sehr vielfach wiederholte Zerlegung der Glieder oder

Coefficienten als Bedingung voraus (63, II). der combinatorischen Evolutionsformel (39) hinge ist es gleichgültig, ob man für die dortigen Polynom gröfsen $a^{\varepsilon}A$, $b^{\varepsilon}B$, $c^{\varepsilon}C$, . . . die Reductions-For (61) überhaupt anwenden, nur einmal oder zu v derholtenmalen anwenden, oder gar nicht gebrauc will, weil die combinatorische unmittelbare Darstellu dieser Gröfsen, ohne alle vorgängige weitere Zerlegu nicht die geringste Schwierigkeit hat.

65. Für Complexionen also gegebener Combi tions-Classen mit ihren Zahlen-Coefficienten nac der Reihe (wie man sie gewöhnlich braucht) beda es für diese Classen gar keiner weitern Zerlegung. Ei solche aber kann zu Erfüllung anderer Bedingung nützlich seyn; z. B. wenn man von

$$e^{15}E = e^{5+10}E$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \end{pmatrix}$$

1) nur diejenigen Complexionen, in welchen $\mathfrak{E}^3$ u $\mathfrak{E}^2$ vorkommt, oder 2) diejenigen wissen wollte, gar kein $\mathfrak{E}$ enthalten, so würde die Zerlegung (S I. S. 237)

$$^5\mathfrak{A}\mathfrak{E}^4 a^{10}A + {}^5\mathfrak{B}\mathfrak{E}^3 b^{10}B + {}^5\mathfrak{C}\mathfrak{E}^2 c^{10}C + {}^5\mathfrak{D}\mathfrak{E}^1 b^{10}D + {}^5\mathfrak{E}\mathfrak{E}^0 e$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \end{pmatrix}$$

zeigen, dafs man für 1) nur $^5\mathfrak{B}\mathfrak{E}^3 b^{10}B + {}^5\mathfrak{C}\mathfrak{E}^2 c^{10}$ für 2) blos $^5\mathfrak{E}\mathfrak{E}^0 e^{10}\mathfrak{E}$, nach dem untergesetzten Zei zu construiren hätte.

66. Die beyden Beyspiele (65, und 63, I) zeig dafs bey solchen Zerlegungen alles auf der gehöri Zerfällung des Summenexponenten beruht. wird für $e^{15}E$ der Summenexponent 15 in $5+10$ z fällt, wo der eine (hier erste) Theil immer der Za [redacted]benen Classe (hier 5, wegen E), der and [redacted]ung (10, zu 15) gleich ist. Wie die b

en Zahlen 5 und 10 die Potenz- und Summenexpo-
nten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ...; von $\mathfrak{E}$; von $\mathfrak{a}A$, $\mathfrak{b}B$, $\mathfrak{c}C$, ...,
n 65) weiter bestimmen, fällt deutlich in die Augen;
r zugehörige Zeiger, der vorher von β anfieng, fängt
n von γ an. Mehrere ausführliche Exempel (Sml. I.
190, 191; 237; 255). Die allgemeine Zerlegung nach
und n (hier 62).

67. Drückt man durch fortgesetzte Zerlegun-
en und Substitutionen mit TETENS alles in erste und
weyte Classen aus (63, II) oder löfst man auch noch
iese mit ARBOGAST auf (63, III), so ergeben sich auf
iesem Wege die numerischen oder Polynomial-Coef-
cienten der Buchstabencomplexionen von selbst. Ich
ingegen betrachte Litteralproducte und ihre Verset-
ungszahlen, jede für sich unabhängig von solchen Zer-
gungen. Dadurch wird die Auffindung der erstern
rleichtert, und die Beyfügung der letztern, nach be-
nnten Regeln, hat keine Schwierigkeit (Sml. I. S. 61-
, Not. [i] u. [k]). Als Beyspiel zur Vergleichung kann
e derivative Entwickelung von $\frac{D^8.\varphi\alpha}{1.2..8} = \frac{D\varphi\alpha}{1}.\frac{D^7.\mathfrak{E}}{1.2..7}$
$+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{D^6.\mathfrak{E}^2}{1.2..6}$ + etc. [no. 47. p, 39, 40] und die
ichgültige combinatorische $\frac{D\varphi\alpha}{1}\mathfrak{a}^8A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\mathfrak{b}^8B$
etc. für den Zeiger $\begin{pmatrix}\mathfrak{E}, \gamma \ldots \iota \\ 1, 2 \ldots 8\end{pmatrix}$ dienen. Die
olynomialgröfsen $\mathfrak{a}^8A$, $\mathfrak{b}^8B$, etc. stehen auch ausge-
hrt (*Infin. Dign. p.* 167. *Tab. V.*). Für die dor-
gen α, $\mathfrak{E}$, γ.. wären hier $\mathfrak{E}$, γ, δ ... ι zu setzen.

68. Nach TETENS gelangt man zu der letzten re-
ucirten Evolution wirklich etwas geschwinder als nach
RBOGAST. Indessen überholt der Letztere den Erstern
f einem andern Wege sehr weit. TETENS nehmlich
gnügt sich bey diesen zerlegenden Substitutionen ste-
n zu bleiben, und führt jede Polynomialgröfse durch

sie hindurch; ARBOGAST hingegen, dem die grofse Weitläuftigkeit solcher derivirenden Zerlegungen, besonders für Glieder, die von dem ersten schon etwas entfernt sind, auffiel, hat sich ihrer blos als Mittel bedient, um kürzere und leichtere Regeln der Entwickelung daraus abzuleiten, und selbige nachher, statt jener weitläuftigern Derivationen, zu gebrauchen. Es ist wichtig, diese Regeln genauer zu kennen, und mit den combinatorisch-involutorischen zu vergleichen.

69. ARBOGAST hat die successiven Evolutionen in $\gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ von zwey auf einander folgenden *Dérivées*, $\frac{D^5 . G^4}{1 . 2 . . 5}$ und $\frac{D^6 . G^4}{1 . 2 . . 6}$, einzeln, (jede besonders) nach der Formel (57. III) berechnet und in einer Tafel [no. 27. p. 20, 21; hier zw. Anh.] aufgestellt, in welcher die gleichnamigen Evolutionen in verticalen Columnen über einander geordnet sind, um solche desto bequemer mit einander vergleichen zu können und daraus die Regel herzuleiten, wie jede untere Colonne vorzüglich aber die letzte reducirte, aus der unmittelbar darüber stehenden obern sich deriviren lasse. In der combinatorischen Sprache: „Wie aus den gegebe„nen Complexionen einer Classe zur Summe n, die „Complexionen derselben Classe, aber zur nächst höhern „Summe $n+1$ (hier, aus den Complexionen von δ^9 „die von $\delta^{10}D$) herzuleiten seyen."

70. Es ist wesentlich nothwendig, wie auch [no. 28] erinnert wird, sich vorzüglich bey den reducirten Evolutionen der beyden letzten Colonnen der Tafel, die das Zeichen D nicht weiter enthalten zu verweilen, und sie genau mit einander zu vergleichen. Aus solchen Vergleichungen nun der über einander stehenden Colonnen überhaupt, und der beyden letzten reducirten insbesondere [no. 27] und andern schon vorher gemachten Beobachtungen, wird der Schlufs [no. 28]

„Um die letzte reducirte Evolution der *Dérivée* in (II) abzuleiten, hat man keine andere Derivationen zu machen, als von den letzten Buchstaben aller Glieder (der Complexionen) in (I) und von den vorletzten Buchstaben einiger dieser Complexionen; alle übrigen Buchstaben aber unverändert zu lassen."

„Complexionen der letzten Art sind alle diejenigen, wo (wenn die Buchstaben nach ihrer Folge geordnet sind) der letzte Buchstabe der Complexion, oder eine Potenz desselben, den unmittelbar vorhergehenden Buchstaben des Alphabets, oder eine Potenz oder Function dieses Buchstabens, zum Vorgänger hat. w) Diese Complexionen sind die einzigen, welche zwey Derivationen zulassen; auch macht man sie gleich auf der Stelle hinter einander."

Wie die letzten reducirten *Dérivées divisées* in den oben erwähnten Fällen zu nehmen seyen, wird [no. 28, 29] nachgewiesen und ausführlich gerechtfertiget. Hier kann nur die aus den sämtlichen Beobachtungen gezogene Vorschrift [die *Règle* no. 30] angegeben werden.

Um aus den, nach der Folge der Buchstaben (das heißt gut) geordneten Complexionen der Function $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$, die gleichfalls gut geordneten Complexionen von $\frac{D^{n+1}.\varphi\alpha}{1.2..n+1}$ zu deriviren, verfährt man also:

w) In diesem Falle wären alle diejenigen Complexionen, wo in den beyden letzten Stellen zween nächst auf einander folgende Buchstaben, z. B. $\gamma\delta$, oder ihre Potenzen $\gamma^m\delta^n$ vorkommen; oder auch, wenn der vorletzte Buchstabe, wie bey α zur Form $\frac{D^m.\varphi\alpha}{1.2..m}.\beta^m$, gehörigen Gliedern, mit einem Functionalzeichen behaftet wäre.

1) „Man variirt in jeder Complexion der $\frac{D^n.(}{1.2.}$
„den letzten Buchstaben oder seine Potenz,
„dem man (ihn oder sie) differentiirt, und schle
„hin β statt D.α; γ statt D.β: δ statt D.γ; u.s f. o
„weitere Coefficienten, als die Einheit, setzt."

2) „Überdies variirt man auch noch den vorle
„ten Buchstaben, seine Potenz, oder seine Functi
„aber nur in denjenigen gut geordneten Complexion
„in welchen sein alphabetischer Nachfolg
„die nächste (also letzte) Stelle nach ihm einnim
„Weil dadurch der Exponent der Potenz des letzt
„Buchstabens um eine Einheit vermehrt wird, so di
„dirt man durch den so vermehrten Exponenten."

3) Giebt eine Complexion zwey Derivationen (
so wird nach der aus (1) sogleich die aus (2) gesetz

Exempel zur Erläuterung der Regel, in Beziehu
auf die beyden letzten Colonnen der Tafel [p. 20, 2

71. Um aus den gut geordneten Gliedern od
Complexionen (63):

$$4\mathfrak{E}^3.\eta + 6\mathfrak{E}^2(2\gamma.\zeta + 2\delta.\varepsilon) + 4\mathfrak{E}(3\gamma^2.\varepsilon + 3\gamma.\delta^2) + 4\gamma^3.\delta$$

d. i. aus dem reducirten Werthe von $\frac{D^5.\mathfrak{E}^4}{1.2..5}$, den
nächstfolgenden von $\frac{D^6.\mathfrak{E}^4}{1.2..6}$ zu deriviren.

1) variire man die letzten Buchstaben dieser Gl
der, indem man statt ihrer die nächstfolgenden set
und beobachte gehörig die Potenzen. Das giebt:

$$4\mathfrak{E}^3.\delta + 6\mathfrak{E}^2(2\gamma.\eta + 2\delta.\zeta) + 4\mathfrak{E}(3\gamma^2.\zeta + 3\gamma.2\delta\varepsilon) + 4\gamma^3.\varepsilon$$

2) Diejenigen Complexionen des obigen Au
drucks, wo man noch überdiefs die vorletzten Buchs
[redacted]ren mufs, (70, 2) sind:

$$6\mathfrak{E}^2.2\delta.\varepsilon + 4\mathfrak{E}.3\gamma.\delta^2 + 4\gamma^3\delta$$

und diese geben, durch eine zweyte Derivation, die Complexionen:

$$6\mathfrak{E}^2.\frac{2\varepsilon\varepsilon}{2} + 4\mathfrak{E}.\frac{3\delta\delta^2}{3} + \frac{4.3\gamma^2\delta\delta}{2}$$

welche, den übrigen vorher (in 1) gefundenen, in ihrer Ordnung beygefügt, den reducirten Werth von $\frac{\mathfrak{D}^6.\mathfrak{E}^4}{1.2..6}$, d. i.

$$4\mathfrak{E}^3.\theta + 6\mathfrak{E}^2(2\gamma.\eta + 2\delta.\zeta + \varepsilon^2) + 4\mathfrak{E}(3\gamma^2.\zeta + 3\gamma.2\delta\varepsilon + \delta^3) + 4\gamma^3.\varepsilon + 6\gamma^2.\delta^2$$

darstellen. [no. 28].

Ein Paar andere Beyspiele, die reducirten Werthe von $\frac{\mathfrak{D}^7.\mathfrak{E}^4}{1.2..7}$, $\frac{\mathfrak{D}^8.\mathfrak{E}^4}{1.2..8}$, jeden aus dem unmittelbar vorhergehenden, abzuleiten [no. 29. p. 25]. Einige noch ausführlichere Anwendungen [no. 31 — 33].

72. Hier (70, 71) wird, wie bey combinatorischen Anordnungen, die alphabetische Ordnung der Buchstaben festgesetzt (vergleiche Note °); die Buchstaben der einzelnen Glieder nach ihrer Folge zu schreiben (was ich gut geordnet nenne) anbefohlen; auch auf Buchstaben aufmerksam gemacht, die, wie zwey nächste im Alphabet, unmittelbar auf einander folgen. Die letzten oder vorletzten Buchstaben der Complexionen variiren, heifst nichts anders, als sie gegen die Buchstfolgenden des Alphabets oder Zeigers austauschen; und so ist die Vorschrift (71) aus den reducirten Gliedern oder Complexionen von $\frac{\mathfrak{D}^5.\mathfrak{E}^4}{1.2..5}$ die von $\frac{\mathfrak{D}^6.\mathfrak{E}^4}{1.2..6}$ zu deriviren, combinatorisch, und mit dem Verfahren im ersten Anhange (3, I) „aus den Complexionen für $^9\mathfrak{D}$ die für $^{10}\mathfrak{D}$ herzuleiten" selbst bis

auf die Ordnung, in welcher die Complexionen auf einander folgen, im Wesentlichen übereinstimmend. Nur der Umstand, dafs ARBOGAST mit den Litteralproducten zugleich ihre numerischen Coefficienten bestimmt (67), macht einige darauf sich beziehende Zusätze der Regel nöthig, deren die einfachere combinatorische Deduction nicht bedarf; wo diese Zahlen den Buchstaben-Complexionen hinterher, nach einer leichten Regel, beygefügt werden (67).

73. Umgekehrt, aus den reducirten, gut geordneten Gliedern von $\frac{D^n.\varphi x}{1.2..n}$, die, von dem zunächst vorhergehenden $\frac{D^{n-1}.\varphi x}{1.2..n-1}$ zu deriviren.

Dafür wird [no, 36, p. 31] folgende Regel gegeben:

I. „Man werfe alle Complexionen weg, (man „übergehe sie) deren lezte Buchstaben auf eine höhere „Potenz, als die erste, erhoben sind."

II. „In jeder Complexion, die auf einen einfachen „Buchstaben sich endigt, vertausche man diesen letzten „Buchstaben mit dem vorhergehenden im Alphabete."

III. „Wo sich (aus II) eine neue Potenz bildet, „dividire man das Glied durch den Exponenten dieser „Potenz."

Anm. Der dritte Theil der Regel geht blos auf die numerischen Coefficienten, die ich von den Litteralproducten abgesondert betrachte. Die übrigen beyden Theile stimmen genau mit meiner combinatorischen Regel (^nD aus ^{n+1}D z.B. ^9D aus ^{10}D abzuleiten, Erster Anh. 3, III. überein). Andere Worte; eine andere Ordnung der Sätze: der Inhalt aber der Regel, im *strengsten* Sinne des Worts, derselbe.

ARBOGAST nennt ein solches Verfahren *Dérivation inverse*, im Gegensatze mit jenem andern, *Dérivation directe* (71); daher auch seine *Dérivées directes et inverses*.

(B) *Derivative Darstellung jedes verlangten Gliedes, ausser der Ordnung, von allen andern (vorhergehenden und folgenden) unabhängig.*

74. Bisher (58—73) ist gezeigt worden, wie die Polynomialgröfsen $\frac{D^{n-1}.\mathfrak{C}^m}{1.2..n-1}$, $\frac{D^n.\mathfrak{C}^m}{1.2..n}$ (die Combinationsclassen $\mathfrak{m}^{m+n-1}M$, $\mathfrak{m}^{m+n}M$) einander so bestimmen, dafs, wenn der reducirte gut geordnete Werth der einen gegeben ist, der der andern sich daraus deriviren lasse; oder, in bestimmten Classen, wie

aus $\mathfrak{a}^nA$, $\mathfrak{b}^nB$, $\mathfrak{c}^nC$, $\mathfrak{d}^nD$, $\mathfrak{e}^nE$, ...
die $\mathfrak{a}^{n+1}A$, $\mathfrak{b}^{n+1}B$, $\mathfrak{c}^{n+1}C$, $\mathfrak{d}^{n+1}D$ $\mathfrak{e}^{n+1}E$, ...

und umgekehrt; überhaupt aus jeder gegebenen Classe zu einer bestimmten Summe, sich die gleichnamige Classe zu der um 1 verschiedenen Summe ableiten lasse.

Sucht man die Evolution der Glieder oder Coefficienten der gegebenen Function hinter einander, oder will man aus einem gegebenen Coefficienten der Reihe den unmittelbar vorhergehenden oder folgenden bestimmen, so sind die Regeln dafür (71, 73) in der Anwendung [no 31—33] ganz bequem. Dennoch ist eine, von allen vorhergehenden und folgenden Coefficienten ganz unabhängige, Darstellung eines verlangten Coefficienten immer vorzüglicher, und gleichsam der letzte und höchste Zweck, worauf die combinatorische (und so auch die derivative) Analysis für diesen und ähnliche Fälle hinarbeitet.

75. In dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Coefficienten [no 22]

$$\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n} = \frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n}.\mathfrak{C}^n + \frac{D^{n-1}\varphi\alpha}{1.2..n-1}.D.\mathfrak{C}^{n-1}$$
$$+\frac{D^{n-2}\varphi\alpha}{1.2..n-2}.\frac{D^2.\mathfrak{C}^{n-2}}{1.2} + \text{etc.} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{D^{n-2}.\mathfrak{C}^2}{1.2..n-}$$
$$+ D\varphi\alpha\,\frac{D^{n-1}.\mathfrak{C}}{1.2..n-1}$$

der derivativen Evolutionsformel (53) ist die Folge der Polynomialgröfsen,

vorwärts gelesen,

$$\mathfrak{C}^n;\ D.\mathfrak{C}^{n-1};\ \frac{D^2.\mathfrak{C}^{n-2}}{1.2};\ \frac{D^3.\mathfrak{C}^{n-3}}{1.2.3};\ \ldots\ \frac{D^{n-1}.\mathfrak{C}}{1.2..n-1}$$

rückwärts gelesen,

$$\frac{D^{n-1}.\mathfrak{C}}{1.2..n-1};\ \frac{D^{n-2}.\mathfrak{C}^2}{1.2..n-2};\ \frac{D^{n-3}.\mathfrak{C}^3}{1.2..n-3};\ \ldots D.\mathfrak{C}^{n-1};\mathfrak{C}^n$$

Die damit verbundenen, mit dem Functionalzeichen behafteten Gröfsen, $D\varphi\alpha$, $\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}$, $\frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}$, ... hängen von successiven ganz einfachen Differentiationen ab. Liefsen sich nun die obigen Polynomialgröfsen, oder die combinatorischen

$$\mathfrak{a}^n A,\ \mathfrak{b}^n B,\ \mathfrak{c}^n C,\ \mathfrak{d}^n D,\ \ldots\ \mathfrak{m}^n N$$

vorwärts und rückwärts eben so leicht successive von einander deriviren, so könnte man, auf einem doppelten Wege, zu jedem verlangten Coefficienten, ausser der Ordnung, von vorhergehenden oder folgenden Coefficienten unabhängig, gelangen, Dies führt zu folgende beyde Aufgaben:

76. Aus den reducirten gut geordneten Gliedern von $\frac{D^n.\mathfrak{C}^m}{1.2..n}$, die, für $\frac{D^{n+1}\mathfrak{C}^{m-1}}{1.2..n+1}$ zu deriviren oder, in combinatorischen Ausdrücken: Aus den Com[illegible] von $\mathfrak{m}^{m+n}M$ (der m^{ten} Combinationsclass

ır Summe $m+n$) die Complexionen von $\overset{-1}{m}{}^{m} + {}^{n}\overset{-1}{M}$ ler nächst vorhergehenden $(m-1)^{ten}$ Classe zu der- lben Summe) beyde für den Zeiger $\begin{pmatrix} \varepsilon, \gamma, \delta, \ldots \\ 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$ zuleiten.

Dafür giebt ARBOGAST [no. 43] folgende Auflö- ung (*Règle*):

I. „Man dividire den ganzen Ausdruck durch m, multiplicire jede Potenz von ε durch ihren Exponen- ten und vermindere diesen Exponenten um 1; nicht zu vergessen, dafs in den Gliedern, die kein ε enthal- ten, dieser Exponent 0 ist."

II. „Nach dieser Vorbereitung mache man die Derivationen nach der Regel [no. 30] oder hier (71). „Einige Beyspiele dazu [no. 44]

77. Die Vorbereitung in (76, I) geht ganz le numerischen Coefficienten der Litteralproducte oder uchstabencomplexionen an, bis auf die Verordnung m Exponenten von ε um 1 zu vermindern, welches einer Wegnahme eines ε, oder dessen Absonderung rch einen verticalen Strich, entspricht. Nach dieser rbereitung, welcher meine Darstellung nicht bedarf, ird sogleich die combinatorische Regel [no. 30] oder er (71) in Ausübung gebracht; wodurch das ganze rfahren recht eigentlich combinatorisch wird. (Erster hang 5, IV). Das wird noch deutlicher aus der Ar- gastischen Auflösung der folgenden Aufgabe, der um- kehrten von dieser, erhellen.

78. Aus den reducirten gut geordneten Gliedern n $\frac{D^n.\varepsilon^m}{1.2..n}$, die für $\frac{D^{n-1}.\varepsilon^{m+1}}{1.2..n-1}$ zu deriviren; ler, in combinatorischen Ausdrücken: Aus den Com- exionen von $m^{m+n}M$ (der m^{ten} Combinations- sse zur Summe $m+n$) die Complexionen von $m+{}^{n}\overset{+1}{M}$ (der nächst folgenden $(m+1)^{ten}$ Classe

zu derselben Summe) beyde für den Zeiger $\begin{pmatrix} \varepsilon, \gamma, \delta, \ldots \\ 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$ abzuleiten.

ARBOGAST giebt davon [no. 47] folgende Auflösung (*Règle*).

I. „Man mache zuförderst folgende Vorberei„tung: Man erhöhe den Exponenten jeder Potenz „von ε um 1, daher man die Glieder, die kein ε ent„halten, mit ε multipliciren mufs; und mache die we„gen dieser Erhöhung nöthige Veränderung der von den „Potenzen von ε herrührenden numerischen Coeffi„cienten, indem man durch jeden so um 1 vermehrten „Exponenten dividirt, und alle Glieder mit $m+1$ mul„tiplicirt."

II. „Auf die so vorbereiteten Glieder wende man „die Regel [no. 36] hier (73) an, so erhält man alle „Glieder von $\frac{p^{n-1}\varepsilon^{m+1}}{1.2..n-1}$, die ε enthalten."

III. „Um die Glieder zu haben, in denen ε nicht „vorkommt, vertausche man, in denjenigen der eben „erhaltenen Glieder, wo nur die erste Potenz von ε „vorkommt, ε mit γ, und dividire durch die Exponen„ten der neuen Potenzen die sich bilden; darauf wende „man wieder die Regel [no. 36] an, so erhält man alle „Glieder, worinn γ, aber kein ε, vorkommt.

IV. „In denjenigen der eben (nach III) erhalte„nen Glieder, worinn nur die erste Potenz von γ vor„kommt, vertausche man γ mit δ, und wende von neuem die Regel [no. 36] an."

V. „So fährt man fort, bis man Glieder erhalten „würde, worinn der letzte Buchstabe ein früherer in der „alphabetischen Ordnung seyn würde, als die vorher„gehenden des Gliedes.

[redacted]mpel dazu [no. 47 und 49].

79. Hier einige diese Regel betreffende Bemerkungen:

Der Vortrag derselben sowohl, als die daraus folgende Entwickelung der Glieder, zeigen, mit Ausnahme dessen, was sich blos auf die Arbogastische Miterhaltung der numerischen Coefficienten bezieht, (die ich den Complexionen erst hinterher beyfüge) eine rein-combinatorische Anordnung in aller Form.

Die alphabetische Ordnung der Buchstaben von ϵ an, in Beziehung auf ihre respectiven Zahlenwerthe von 1 an x), dient dabey als Grundlage für die daraus zusammenzusetzenden Glieder. Zuerst werden die mit ϵ anfangenden (zur Ordnung ϵ gehörigen) Complexionen, durch Erhöhung des Exponenten von ϵ um 1, (durch Vorschreibung eines ϵ vor die gegebenen Complexionen) und Anwendung der Regel (73) aufgeführt (78, I, II); daraus werden durch Umtauschung von ϵ mit γ, und weitere Anwendung jener Regel, die mit γ anfangenden (die Ordnung γ ausmachenden) Complexionen gefolgert (78, III); und daraus weiter, durch Umtauschung von γ mit δ, und erneuerte Anwendung jener Regel, die mit δ anfangenden (zur Ordnung δ gehörigen) Complexionen (78, IV); u. s. w. die folgenden Ordnungen ε, ζ, η.. so lange das Umtauschen der Anfangsbuchstaben und die Anwendung jener Regel für die Endbuchstaben, statt findet; so lange nämlich durch Anwendung beyder Verfahren gut geordnete Complexionen (72) daraus folgen.

x) *Il est nécessaire, de faire observer aux coefficiens* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots)$ *des puissances* $x^0, x^1, x^2, x^3 \ldots$ *un certain ordre, par exemple, l'ordre alphabétique, qu de les marquer par des indices; il est avantageux, que le nombre qui exprime l'indice soit le même que l'exposant de la puissance de* x *à la quelle le coefficient appartient;* also α fur α, und 1, 2, 3, 4 ... für $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ *respective* [no. 9. p. 6, 7]. Man vergleiche die Note v.

Jedes einzelne Glied, dessen Anfangsbuchstabe durch Vertauschung gegen den nächstfolgenden des Alphabets in seinem Zahlenwerthe um 1 erhöhet wird, wird in seinem Endbuchstaben, durch Anwendung der Regel (73), nach welcher man den nächst vorher gehenden dafür setzt, um eben so viel erniedrigt. Dadurch wird also den Complexionen immer dieselbe Summe erhalten; und da die Erhöhung durch Tausch nur die Anfangsbuchstaben betrift, die keine höhere als die erste Potenz haben, (78, III, IV) und mit Veränderung der Endbuchstaben (3) nur so lange fortgefahren wird, als noch gleiche oder spätere Buchstaben auf frühere folgen: so kann auch keine Complexion entstehen, die nicht gut geordnet wäre (78, V). Und so werden denn durch die Auflösung (78) lauter gut geordnete Complexionen und Classen gefolgert, deren Glieder sämtlich zu derselben Summe gehören, und wie wachsende Zahlen (arithmographisch) fortgehen.

Hier ist also wieder die derivative Auflösung (78) mit der combinatorischen (Erster Anhang 5, III) vollkommen übereinstimmend und identisch. Man vergleiche die Anmerkung a. a O. des Anhangs.

80. Diesem widerspricht nicht, was ARBOGAST (*Préf. p.* V) sagt: „*Je n'ai fait aucun usage des Combinaisons.*“ Er hat nämlich bey seinen Untersuchungen keine Combinationen zum Grunde gelegt; ist nicht von Combinationen ausgegangen; hat nichts von der dafür eingeführten Sprache gebraucht; seine successiven Derivationen haben ihn auf die ganz einfachen Regeln für die endlichen *Développemens réduits* geleitet — Dafs aber gleichwohl eben diese Regeln, welche die Complexionen sogleich vollkommen reducirt, in der simpelsten Gestalt, und gut geordnet, darstellen; dafs diese so unentbehrlichen Regeln, die sich nicht weiter abkürzen lassen, sowohl dem Inhalte als der Ausführung *nach*, ganz combinatorisch und mit dem vor-

annten genau übereinstimmend sind, ist
ewifs; und so erhellet, dafs die anfänglichen
keiten des derivativen Verfahrens sich endlich
natorische Regeln auflösen, und dadurch sich
heben und in der Kürze abthun lassen. Man
ie Regeln nicht etwa zu den Berührungs-
n rechnen, von denen in der Vorrede [p. V.]
wird, dafs die Derivationsmethode mit der
orischen einige solche Puncte gemein habe;
betreffen gerade zu die Hauptsache, von
die Rede ist: „die promte ganz einfache Ent-
ng und Darstellung der Coefficienten der de-
Evolutionsformel."

Es giebt allerdings einige gemeinschaftliche
spuncte beyder Methoden: die festgesetzte
che oder numerische Anordnung der Buch-
d Zahlen; die Beziehung der Exponenten der
Gröfsen auf die Coefficienten der Glieder, in
vorkommen (22 und die dortige Note); das
n auf Buchstaben in den Complexionen, die
nächste im Alphabet, unmittelbar auf einan-
; das Austauschen der Anfangs- oder End-
en, zuweilen auch der vorletzten, gegen die
folgenden oder vorhergehenden im Alpha-
, 79). Da aber aus dieser gemeinschaftlichen
etzung, durch das fortgesetzte derivative Ver-
am Ende keine andern als die obigen schon vor-
annten combinatorischen Regeln abgeleitet wer-
erhellet daraus der wichtige Einfluss der Com-
nen auf die Analysis überhaupt, und insbeson-
er Vorzug der combinatorischen Evolutionsfor-
9), welche die gesuchten Glieder *directe* und
soluter Leichtigkeit finden lehrt; da hingegen
rivative Formel (53) erst durch Umwege dahin
. Das wird zugleich die Darstellung combina-
er Anordnungen und Derivationen im ersten

Anhange rechtfertigen. Ihre Unentbehrlichkeit bey d Gebrauche der Evolutionsformeln, macht eine näh Bekanntschaft mit derselben, in ihrer ursprünglicl ganz einfachen Gestalt, nothwendig und für mehr Leser wünschenswerth, denen es angenehm seyn wi das Wenige, was hier zur Vergleichung nöthig ist, (arithmographische Form derselben) im Buc selbst zu finden. Auswärtige der deutschen Sprac unkundige Liebhaber, werden über diese und and combinatorische Regeln und Formeln, mit deren ga kurzen Beweisen, in PFAFF's *Disquisitionibus an lyticis* (*Tract. III. p.* 260 — 333) ausführliche Belel rung finden.

82. Noch einen bedeutenden Vorzug behaupt diese Regeln in ihrem combinatorisch-involutorisch Gewande, dafs sie, so wie die Einsicht in ihre Gründ so leicht sind, dafs einmal ein verdienter Analyst sog behauptete, man könne sie, ohne alle Anweisung, g trost dem gesunden Menschenverstande überlasse jeder, der ihrer nöthig hätte, werde sie leicht find und gebrauchen. In der That ist auch die (besond rein-) combinatorische Form diejenige, die in Absic auf Zusammensetzung und Entwickelung der Eleme te, allen andern an Simplicität weit vorgeht; welch vornehmlich, oder vielmehr ganz allein, auf dem U stande beruht, dafs in der Combinationslehre gleich Anfange, ausser jenen Berührungspuncten (81), Begriffe von „— Complexionen zu bestimmten Su „men; von gut geordneten Complexionen, Ordnung „und Classen, wo die Glieder arithmographisch od „lexikographisch fortgehen, und was das für einen E „fluſs auf die Veränderung der Buchstaben in den e „zelnen Stellen habe; von combinatorischen Depend „zen und den daher rührenden Involutionen und Ev „lutionen" — aufgeführt und festgesetzt werden. Ga anders verhält es sich mit der derivativen Ableitu

der so eben vorgetragenen Regeln für die sowohl abhängige als unabhängige Evolution der Polynomialgrößen, die, weil sie im Grunde combinatorischer Art sind, ohne combinatorische Begriffe dabey anzubringen, auch nicht in der Kürze sich abthun und rechtfertigen lassen. y)

SECHSTER ABSCHNITT.

Die combinatorische Evolution der Polynomialgröfsen, auf dem directen Wege ist leichter, als die derivative Deduction derselben durch Substitutionen. Was ARBOGAST'N *veranlafset haben könne, das Gegentheil zu behaupten. Zwiefache combinatorische Ansicht der derivativen Function* $\frac{D^n . \mathfrak{G}^m}{1.2..n}$. KRAMP's *combinatorische Integrale oder Aggregate.* ROTHEN's *Versuch einer Theorie solcher Integrale.*

82. Nach dem so eben Beygebrachten mufs es nothwendig befremden, wenn in [no. 52] behauptet wird; die Polynomialgröfsen β^n; $D.\mathfrak{G}^{n-1}$; $\frac{D^2.\mathfrak{G}^{n-2}}{1.2}$; etc. (meine $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$, $\mathfrak{c}^n C$, etc. $\mathfrak{n}^n N$) liefsen sich auch combinatorisch ausführen, „*quoique d'une façon moins facile et moins analytique.* Über das

y) *Quoique les règles de la méthode simplifiée soient très faciles, l'analyse qui y mène peut paroître un peu longue. Outre que j'ai donné le moyen d'abréger cette analyse, j'observerai que l'apparence de longueur en doit être imputée en grande partie au soin que j'ai pris de tout démontrer et de ne rien passer de ce qui m'a paru propre à répandre quelque lumiere.* Calc. des Deriv. Préf. p. IV. Als Beyspiele will ich hier blos anführen, was über die *Développemens successives* und ihre Rechtfertigung [p. 18 — 25]; ingleichen [p. 39 — 41] über die Regel [no. 47] beygebracht worden.

moins analytique in der Folge; zuförderst noch etwas die Beschuldigung des *moins facile* betreffend.

84. Wer noch zweifeln könnte, dafs die Polynomialgröfsen mit unübertrefflicher Leichtigkeit combinatorisch sich construiren und ausführen lassen, und da die derivativen endlichen Darstellungen derselben (*di Développemens réduits*) keine andern, als combinatorische, sind: der dürfte nur den ersten Anhang zu dieser Abhandlung mit Aufmerksamkeit im Zusammenhange lesen, um sich vollkommen davon zu überzeugen. Auch ist wohl voritzt die grofse Simplicität der combinatorischen Operationen allgemein anerkannt, und man giebt ohne Schwierigkeit zu, dafs sie leichter sind, als die arithmetischen; dafs Buchstaben sich leichter permutiren, combiniren, variiren, als Zahlen sich addiren, subtrahiren, multipliciren oder dividiren lassen.

85. Wenn gleichwohl am a. O. [no. 52] behauptet wird, die combinatorische Anordnung und Darstellung der Polynomialgröfsen sey weniger leicht, als die derivative, so läfst sich die Veranlassung zu einem solchen Ausspruche aus Folgendem begreiflich machen. ARBOGAST sagt (*Préf. p. v*), um die Zeit, da er seine Untersuchungen angefangen habe, wären ihm meine Bezeichnungen und Verfahren wenig oder gar nicht bekannt oder geläufig (*familières*) gewesen; meine Schriften habe er blos dem Titel nach gekannt; er habe seine eigenen Ideen verfolgt: und so ist es wohl möglich, dafs ihm nur meine ersten frühern Verfahren nicht aber die spätern weit vollkommnern und mannichfaltigern, rein-combinatorischen Darstellungen bekannt geworden sind. Ein Beleg zu dieser Conjectur scheint zu seyn, dafs in dem ausführlichen Arbogastischen Werke, nur meiner ersten, vor mehr als zwanzig Jahren (1779) heraus gegebenen, noch sehr unvoll-

mmenen combinatorischen Schrift [z]) Erwähnung ge-
nieht; die spätern aber, und in Absicht auf die ver-
sserte Methode und ihre weitere Anwendung, viel
rzüglichern [α]), ganz mit Stillschweigen übergangen
rden.

86. Eine Bestätigung jenes Arbogastischen Aus-
uchs (83) scheint selbst in der von ihm [no. 52, 53]
fgeführten Beschreibung des combinatorischen dop-
lten Ausdrucks für die Polynomialgröfse $\frac{D^n . \mathfrak{C}^m}{1 . 2 .. n}$
thalten zu seyn. Ich will die ganze Stelle wörtlich
er anführen:

I. Der Ausdruck $\frac{D^n . \mathfrak{C}^m}{1 . 2 .. n}$ bedeutet den Coefficien-
les $(n+1)$ten Gliedes der zu entwickelnden Potenz m
les Polynoms $\mathfrak{C} + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 +$ etc.

„Wenn m eine ganze positive Zahl, so ist durch
lie Theorie der Combinationen erweislich:

1) dafs dieser nämliche Coefficient aus der Summe
ller Producte besteht, die durch

$$\mathfrak{C}^p . \gamma^q . \delta^r . \varepsilon^s . \ldots$$

ich können darstellen lassen, wo $p, q, r, s \ldots$ ganze
ositive Zahlen oder Null, und so beschaffen sind, dafs

$$p + q + r + s \text{ etc.} = m,$$
$$q + 2r + 3s + \text{ etc.} = n;$$

2) „dafs jedes dieser Producte zum numerischen
efficienten hat,

$$\frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots . m}{1 . 2 .. p \times 1 . 2 .. q \times 1 . 2 .. r \times 1 . 2 .. s \times \ldots}$$

z) *Infinitinomii Dignitatum — historia, leges ac formulae*; auf
iche bald darauf (1781) die *primae lineae novi systematis Perm.
ab. et Variat.* folgten.

α) Namentlich die von mir heraus gegebenen Hefte
s mathematischen Archivs, und die beyden
mmlungen combinatorisch-analytischer Ab-
ndlungen.

„oder, welches auf eins hinaus läuft,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(p+1)}{1.2..q \times 1.2..r \times 1.2..s \times \ldots}$$

„Nimmt man nun, (wie EULER mehrmals gethan „hat) $\int$ als Zeichen der Vereinigung mehrerer Glieder „oder Producte mit einander, so kann man den Coeffi„cienten von x^n in der m^{ten} Potenz des obigen Poly„noms, durch

$$\int \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(p+1)}{1.2..q \times 1.2..r \times 1.2..s \times \ldots} \cdot \mathfrak{G}^p . \gamma^q . \delta^r . \varepsilon^s \ldots !$$

„ausdrücken; und so ist denn

$$\frac{\mathfrak{D}^n . \mathfrak{G}^m}{1.2..n} = \int \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(p+1)}{1.2..q \times 1.2..r \times 1.2..s \times \ldots} \cdot \mathfrak{G}^p . \gamma^q . \delta^r . \varepsilon^s \ldots,$$

für $p + q + r + s + \text{etc.} = m$,
und $q + 2r + 3s + \text{etc.} = n$;

„das ist die Relation, die wir hier nachweisen wollten.

II. „Eine andere Art, jene derivative Polynomial„gröfse combinatorisch darzustellen, ist folgende:

„Nimmt man für die Buchstaben $\mathfrak{G}$, γ, δ, ε, . . „die respectiven Zeiger-Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . oder „drückt man jene Buchstaben durch α_1, α_2, α_3, α_4 . . aus: so deutet $\frac{\mathfrak{D}^n . \mathfrak{G}^m}{1.2..n}$ die Summe aller Producte an „jedes zu m Buchstaben (wobey auch Wiederholunge „derselben Buchstaben verstattet sind), die sich ver„schiedentlich dergestalt zusammen setzen lassen, da„in jedem Producte die Summe der Zeigerzahlen vo„allen Buchstaben, gleich $m+n$; wo noch jedem so„chen Producte der numerische Coefficient, oder di„hl beyzufügen ist, welche die Menge der Verse-

ungen ausdrückt, deren die Buchstaben des Products mit Rücksicht auf ihre Wiederholungen, wo dergleichen vorkommen) fähig sind.

„Durch Beyhülfe dieser Zeigerzahlen lässt sich das Auffinden solcher Producte auf folgende, die Partition der Zahlen betreffende, Frage zurück führen; Es ist die ganze Zahl $m+n$ gegeben, man soll alle verschiedene Arten nachweisen, wie sich diese Zahl durch Addition von m kleinern ganzen Zahlen, mit Wiederholungen, zusammen setzen lasse.

III. „Weil $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(p+1)}{1.2..q \times 1.2..r \times 1.2..s \times ..}$ für das Product $\mathfrak{E}^p.\ \gamma^q.\ \delta^r.\ \varepsilon^s.\ \ldots$ die Menge der Buchstabenversetzungen angiebt: so kann man dadurch die numerischen Coefficienten oder Versetzungszahlen für jedes Glied der Polynomialgröfsen $\frac{D.\mathfrak{E}^{m-1}}{1}$; $\frac{D^2.\mathfrak{E}^{m-2}}{1.2}$; $\frac{D^3.\mathfrak{E}^{m-3}}{1.2.3}$; etc. verificiren. So z. B. wäre, für $\mathfrak{E}^3\ \gamma^2\ \delta^1$ die Summe der Exponenten $3+2+1=6=m$, folglich $\frac{6.5.4}{1.2\times 1}=60$, die zugehörige Versetzungszahl.“ So weit die Arbogastische hierher gehörige Stelle.

87. Die doppelte combinatorische Ansicht für $\frac{n.\mathfrak{E}^m}{2..n}$ ist hier (86, I, II) sehr wahr und bündig dargestellt; aber eben diese Darstellung scheint auch jenen Ausspruch; „*moins facile*“ für Leser wenigstens, die mit der Combinationslehre nicht bekannt genug sind, zu bestätigen — wenn nicht zugleich die Anwendung combinatorischer Formeln und Verfahren (auf I und II) nachgewiesen, vornehmlich aber nicht deutlich gezeigt wird, wie die Bedingungsgleichungen für

m und n (in I) combinatorisch sich behandeln l
und wie leicht ihre combinatorische Auflösung sey
das Verfahren dafür auf dem gewöhnlichen Wege
allerdings zu verdrüſslichen Weitlauftigkeiten. (
S. 119, 120).

88. Am leichtesten läſst sich der (in 86, II)
lich angegebene Werth von $\frac{D^n . \mathfrak{E}^m}{1.2..n}$ in einer
natorischen Formel darstellen, wenn man nur
Begriffe von Combinationen hat.

Die Darstellung aller Producte, jedes zu m (
wiederholten) Buchstaben, zur Summe $m+n$
welche Producte die möglichen Versetzungen,
wirklich gemacht, sondern nur durch eine vorge
Zahl, die ihre Menge ausdrückt, angegeben w
sollen, deutet offenbar auf die m^{te} Combinations
M, mit Wiederholungen, zur Summe $m+n$, mit l
fügtem Polynomialcoefficienten oder der Verset
zahl $\mathfrak{m}$; auf die Formel also,

$$\frac{D^n . \mathfrak{E}^m}{1.2..n} = \mathfrak{m}^{m+n} M$$

$$\left[\begin{array}{l} D.\mathfrak{E} = 1\,\gamma \\ D^2.\mathfrak{E} = 1.2\,\delta \\ \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{ccccc} \mathfrak{E} & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{array}\right)$$

wie sie bereits (62) ist aufgeführt worden.

89. Dieser Ausdruck durch $\mathfrak{m}$, M, m und n,
beygefügtem Zeiger, ist durchaus in meiner comb
rischen Zeichnung. Jener andere gleichviel bed
de hingegen (86, I am Ende) mit den beyden l
gungsgleichungen, ist, der äussern Form nach,
von dem meinigen, weniger aber von der gew
chen algebraischen Sprache, verschieden. Solche
Darstellungen hat sich neuerlich Prof. F

sehr scharfsinnig bedient β), und ihnen die Benennung combinatorischer Integrale oder Aggregate gegeben.

90. Was nun jenen Werth für $\frac{D^n . \mathfrak{E}^m}{1.2..n}$ (86, I am Ende) anbetrift, so fällt in die Augen, dafs hier alles auf der Auflösung und Genügeleistung der beiden Gleichungen für m und n beruht, und dafs man sich dabei um combinatorische Hülfe umsehen mufs, wenn man nicht in Weitläuftigkeit gerathen will; wie auch Professor KRAMP gethan, der durch seine combinatorischen Integrale und dafür angewandten Hülfssätze viel geleistet hat.

Bey der kurzen Übersicht des Wenigen, was eigentlich hieher gehört, will ich das von ARBOGAST a. a. O. aufgeführte Potenzen Product, auch hier beybehalten.

91. Bey jedem Producte von Potenzen, mit beygeschriebenen Zeiger- oder Stellen-Zahlen

$$\mathfrak{E}^p . \gamma^q . \delta^r . \varepsilon^s . \zeta^t \ldots .$$
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots .$$

lassen sich drey Dinge deutlich unterscheiden, und theils einzeln, theils verschiedentlich mit einander verbunden, in Betrachtung ziehen:

Die Exponenten	p	q	r	s	t	....
die Buchstaben	$\mathfrak{E}$	γ	δ	ε	ζ	....
die Zahlen	1	2	3	4	5	....

Für die Bestimmung der $p, q, r, s \ldots$ von welcher hier eigentlich die Rede ist, will ich drey Falle aufführen, die sich als so viel verschiedene Aufgaben betrachten lassen.

β) Sml. I. S. 162—122; Sml. II. S. 341—366; KRAMP Anal. des Refr. Astron. Chap. III. Die Benennung combinatorische Integrale (Sml. II. S. 353, 363) combinatorische Aggregate (Anal. des Refr. p. 73. no. 91).

R

92. Es ist gegeben:

1) $p+q+r+s+t+\text{etc.}=m$,

die Summe der Exponenten $p, q, r, s, t \ldots$ der Buchstaben $\mathfrak{G}, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$, ohne Rücksicht auf die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$;

oder 2) $1p+2q+3r+4s+5t+\text{etc}=n$,

die Summe der Vielfachen dieser Exponenten jener Buchstaben, in Rücksicht auf die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$,

oder 3) $p+q+r+s+t+\text{etc.}=m$,

$1p+2q+3r+4s+5t+\text{etc.}=n$,

die Summe der Exponenten und ihrer Vielfachen, nach (1 und 2):

Man soll die möglichen Auflösungen, d. i. die zusammen gehörigen Werthe der $p, q, r, s, t \ldots$ angeben, die diesen Gleichungen Genüge thun. Jede der Gröfsen $p, q, r, s, t \ldots$ kann eine ganze positive Zahl, oder auch 0, seyn.

93. Hier sind zwar die Gleichungen (1, 2, 3 in 92), als Bedingungsgleichungen, von dem Producte $\frac{\mathfrak{G}^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \zeta^t \ldots}{1\ 2\ 3\ 4\ 5 \ldots}$ abgeleitet; man sieht aber ein, dafs diese Gleichungen als unbestimmte, auch an sich betrachtet werden können, und dafs ihre Beziehung auf ein solches Product keinesweges nothwendig, wohl aber in anderer Rücksicht nützlich und brauchbar ist.

Erster Fall (92, 1)

94. Aufgabe. Für die unbestimmte Gleichung

$$p+q+r+s+t+\text{etc.}=m$$

die möglichen zusammen gehörigen Zahlenwerthe der $p, q, r, s, t \ldots$ anzugeben.

Auflösung I Die Anzahl oder Menge der $p, q, r, s, t \ldots$ sey π, so fordert die Aufgabe, die Summe m aus Zahlen, aber keinen andern als 0, 1, 2, 3, 4 ... zu

le mögliche Arten zusammen zu setzen; und so denn die Aufgabe von der π^{ten} Variationsclas-, zur Summe m, für den Zeiger 0, 1, 2, 3 . . . m,

on $\overset{\ldots\, s\, r\, q\, p}{{}^{m}\Pi}_{0,1,2..m}$ ab, die sich durch eine leichte In-on ergiebt. (Zweyt. Anh.).

q	p	$\beta^p \gamma^q \delta^r$
0	4	β^4
1	3	$\beta^3 \gamma$
2	2	$\beta^2 \gamma^2$
3	1	$\beta^1 \gamma^3$
4	0	γ^4
0	3	$\beta^3 \delta^1$
1	2	$\beta^2 \gamma^1 \delta^1$
2	1	$\beta^1 \gamma^2 \delta^1$
3	0	$\gamma^3 \delta^1$
0	2	$\beta^2 \delta^2$
1	1	$\beta^1 \gamma^1 \delta^2$
2	0	$\gamma^2 \delta^2$
0	1	$\beta^1 \delta^3$
1	0	$\gamma^1 \delta^3$
0	0	δ^4
γ	β	

95. Exempel. Für $m=4$ und p, q, r (wo $\pi=3$) wäre also die dritte Variationsclasse, C, zur Summe 4, mit Wiederholungen, für den Zeiger 0, 1, 2, 3, 4, das ist $\overset{r\,q\,p}{{}^{4}C}_{(0,1,2,3,4)}$ zu construiren.

Von den beyden combinatorischen Anordnungen, hier zur Seite, enthält die erste oder die Zahleninvolution zur Summe 4, die lexikographisch geordneten Variationscomplexionen, deren einzelne Zahlen die zusammengehörigen Werthe der überiebenen Exponenten p, q, r, d. i. die Expon der untergeschriebenen β, γ, δ, bestim-

Beyder Verbindung giebt die zweyte Darstel- wie sie hier unter $\beta^p \gamma^q \delta^r$ steht. Die Zahlen ersten sind variirt, die Buchstaben in der zwey-los combinirt, auch sind die Buchstabencom-nen einzeln gut geordnet, aber nicht in ih-Folge, wie sie es seyn würden, wenn man der ncolonne die Buchstaben β, γ, δ in dieser Ord-unterschreiben, und die daher entstehenden Buch-hcomplexionen von unten herauf lesen wollte. ührt auf folgende

96. Auflösung II. Man beziehe die $p, q, r, s \ldots$ auf die $\varepsilon, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ (92), so läfst sich beyder Verbindung durch folgende Formel ausdrücken:

$$\int[\varepsilon^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \ldots] = {}_{p+q+r+s\ldots=m}{}'M_{(\varepsilon,\gamma,\delta,\varepsilon\ldots)}$$

wo der Ausdruck linker Hand des Gleicheitszeichens das combinatorische Integral, mit der Bedingungsgleichung; der Ausdruck rechter Hand, die m^{te} Classe der Combinationen an sich (*simpliciter*), mit Wiederholungen, für die Elemente $\varepsilon, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ andeutet, deren Entwickelung die Zahlenwerthe der $p, q, r, s \ldots$ in den einzelnen Complexionen zugleich aufführt.

Die Richtigkeit der Formel erhellt daraus, weil $\varepsilon^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \ldots$ für $p+q+r+s\ldots=m$, das allgemeine Glied der m^{ten} Classe, 'M, der Combinationen überhaupt, darstellt; so, dafs jede aus m Buchstaben des Zeigers gegebene, Combinationscomplexion, durch gehörige Bestimmung der $p, q, r, s \ldots$ sich daraus ableiten läfst.

Für das Exempel (95), wo $m=4=p+q+r$ wäre ${}_{(\varepsilon,\gamma,\delta,\varepsilon\ldots)}{}'M = {}_{(\varepsilon,\gamma,\delta)}{}'D$. Die involutorischen Complexionen für diese Classe stehen (Sml. I. S. 174. β); man darf nur, von den dortigen $aaaa$ an bis mit $cccc$ überall statt a, b, c hier $\varepsilon, \gamma, \delta$ setzen.

97. Exempel 2. Für $p+q+r+s=2$, die möglichen zusammen gehörigen Werthe der p, q, r, s sowohl an sich als in Beziehung auf die $\varepsilon, \gamma, \delta, \varepsilon$ zugeben.

Hier ist $\pi=4$ und $m=2$: also

$${}^{pqrs\ldots}_{(0,1,2)} = {}^{pqrs}{}_2D \quad \text{und} \quad \int[\varepsilon^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s] = {}_{p+q+r+s=2}{}'B_{(\varepsilon,\gamma,\delta,\varepsilon}$$

ührt auf nachstehende Involutionen:

q	r	s						
0	0	2	$\mathfrak{E}^0\ \gamma^0\ \delta^0\ \varepsilon^2$	ε^2	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}$
0	1	1	$\mathfrak{E}^0\ \gamma^0\ \delta^1\ \varepsilon^1$	$\delta\varepsilon$	$\mathfrak{E}$	γ
0	2	0	$\mathfrak{E}^0\ \gamma^0\ \delta^2\ \varepsilon^0$	δ^2	$\mathfrak{E}$	δ
1	0	1	$\mathfrak{E}^0\ \gamma^1\ \delta^0\ \varepsilon^1$	$\gamma\varepsilon$	$\mathfrak{E}$	ε
1	1	0	$\mathfrak{E}^0\ \gamma^1\ \delta^1\ \varepsilon^0$	$\gamma\delta$	γ	γ
2	0	0	$\mathfrak{E}^0\ \gamma^2\ \delta^0\ \varepsilon^0$	γ^2	γ	δ
0	0	1	$\mathfrak{E}^1\ \gamma^0\ \delta^0\ \varepsilon^1$	$\mathfrak{E}\varepsilon$	γ	ε
0	1	0	$\mathfrak{E}^1\ \gamma^0\ \delta^1\ \varepsilon^0$	$\mathfrak{E}\delta$	δ	δ
1	0	0	$\mathfrak{E}^1\ \gamma^1\ \delta^0\ \varepsilon^0$	$\mathfrak{E}\gamma$	δ	ε
0	0	0	$\mathfrak{E}^2\ \gamma^0\ \delta^0\ \varepsilon^0$	$\mathfrak{E}^2$	ε	ε
γ	δ	ε				

ahlen in der ersten Colonne, unter p, q, r, s ber $\mathfrak{E}$, γ, δ, ε sind, im ersten Falle die zusamehörigen Werthe für die p, q, r, s; im andern die Potenzexponenten für die $\mathfrak{E}$, γ, δ, ε (zwey- dritte Colonne). Die vierte Colonne stellt die ordneten Complexionen der Involution $'B_{(\mathfrak{E},\gamma,\delta,\varepsilon)}$

Sml. I. S. 174. β, nur $\mathfrak{E}$, γ, δ, ε statt der dorti- b, c, d gesetzt.

). Für $'M = \mathfrak{E}^m + \mathfrak{E}^{m-1}{}'A + \mathfrak{E}^{m-2}{}'B + \text{etc.} + \mathfrak{E}^0{}'M$ $(\mathfrak{E},\gamma,\delta,\varepsilon..)$ $(\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta\ ..)$

. S. 215, 84) lassen sich die Classen $'A, 'B, 'C \ldots 'M$, von einander ableiten (a. a. O. S 174, α). Diese n, obschon nicht in diesen Zeichen, hat schon ERNOULLI (*Opp. T. II. p.* 993—996) benutzt, die für $(a+b+c+\text{etc.})^m$ zu finden. Auch hier (für die dortigen a, b, c, d ... statt der n $\mathfrak{E}$, γ, δ, ε...) Litteralproducte $a^p b^q c^r d^s \ldots$ ren Versetzungszahlen getrennt und besonders tet, auch wird dabey die Bedingungsgleichung $+r+s+\text{etc.} = m$ aufgeführt.

Zweyter Fall [92, 2)

99. Aufgabe. Fur die unbestimmte Gleichung

$$1p + 2q + 3r + 4t + \text{etc.} = n$$

die möglichen zusammen gehörigen Zahlenwerthe $p, q, r, s \ldots$ anzugeben.

Auflösung. Die Beziehung der $p, q, r, s \ldots$ auf $\varepsilon, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ giebt das combinatorische Inte

$$\int[\varepsilon^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \ldots] = {}^n\mathrm{J} = {}^{n}\mathfrak{J}^{\varepsilon}$$

$$1p+2q+3r+4s+\text{etc.} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots \end{pmatrix}$$

nachdem man die Complexionen arithmographis oder lexikographisch entwickeln will. (Sml 183).

Beyspiel, für $n=7$ oder ${}^{7}\mathfrak{J}^{\varepsilon}$ (Samml. I. S. 2 und hier die Involution β^{n-1} [β] etc. [Zweyter A das dortige $n=7$ gesetzt).

	1	2	3	4	5	6	7
	p	q	r	s	t	u	v
ε^7	7	0	0	0	0	0	0
$\varepsilon^5\gamma^1$	5	1	0	0	0	0	0
$\varepsilon^4\delta^1$	4	0	1	0	0	0	0
$\varepsilon^3\gamma^2$	3	2	0	0	0	0	0
$\varepsilon^3\varepsilon^1$	3	0	0	1	0	0	0
$\varepsilon^2\gamma^1\delta^1$	2	1	1	0	0	0	0
$\varepsilon^2\zeta^1$	2	0	0	0	1	0	0
$\varepsilon^1\gamma^3$	1	3	0	0	0	0	0
$\varepsilon^1\gamma^1\varepsilon^1$	1	1	0	1	0	0	0
$\varepsilon^1\delta^2$	1	0	2	0	0	0	0
$\varepsilon^1\eta^1$	1	0	0	0	0	1	0
$\gamma^2\delta^1$	0	2	1	0	0	0	0
$\gamma^1\zeta^1$	0	1	0	0	1	0	0
$\delta^1\varepsilon^1$	0	0	1	1	0	0	0
θ^1	0	0	0	0	0	0	1
	ε	γ	δ	ε	ζ	η	θ
		2	3	4	5	6	7

Die Buchstabencomplexionen in der ersten Colonne ind lexikographisch geordnet gerade so, wie sie kommen ürden, wenn man in der allgemeinen Formel (a. a. O.) =7 setzte; wo also $\beta^{n-7}\theta$ d. i. $6^{\circ}\theta = \theta$ die letzte yn würde.

Für die arithmographische Folge vor- und rückärts, ist (Sml. I. S. 200)

$$^{n}J = \left\{ \begin{matrix} {}^{n}A + {}^{n}B + {}^{n}C + {}^{n}D + {}^{n}E + {}^{n}F + {}^{n}G \\ {}^{n}G + {}^{n}F + {}^{n}E + {}^{n}D + {}^{n}C + {}^{n}B + {}^{n}A \end{matrix} \right\}$$

ie Classen rückwärts, aber ihre Complexionen vorärts gelesen, geben das Krampische Zahlentäfelchen Sml. II. S. 356) für die dortigen $\beta, \gamma, \delta, \ldots \theta$, von em hiesigen (in der zweyten Colonne) blos in der rdnung etwas verschieden. Man vergleiche die $^{n}B \ldots {}^{n}G$ (*Infin. Dign. p.* 167) statt der dortigen $\beta, \gamma \ldots$ hier $\beta, \gamma, \delta \ldots$ gesetzt.

100. Im Zahlentäfelchen (99) sind die Zahlen wischen $6, \gamma, \delta \ldots \theta$ und $p, q, r \ldots v$ die Exponenten der erstern und zugleich die Werthe der letzm: auch kommen die Stellenzahlen $1, 2, 3 \ldots 7$ nter $6, \gamma, \delta \ldots \theta$, mit den Vielfachen über $q, r \ldots v$ überein. Die Exponenten der $6, \gamma, \delta \ldots$ it ihren Stellzahlen multiplicirt, geben also so viel, die Werthe der $p, q, r \ldots$ mit ihren Vielfachen; raus die Richtigkeit der Auflösung (99) erhellet.

Eine Auflösung durch Variationscomplexionen, e im ersten Falle (94, 95) würde wegen der mehreren mmen $n, n-1, n-2 \ldots$ die man hier in Bechtung zu ziehen hätte, in Weitläuftigkeit führen. e gegebene, durch bloße Combinationscomplexion, ist äusserst leicht und kurz.

Dritter Fall (92. 3)

101. Aufgabe. Für die unbestimmten Gleichungen

$$p + q + r + s + t + \text{etc.} = m,$$
$$1p + 2q + 3r + 4s + 5t + \text{etc.} = n$$

die zusammen gehörigen, beiden Gleichungen Genüge leistenden, Zahlenwerthe der p, q, r, s, t, etc. anzugeben.

Auflösung. Die Beziehung der p, q, r, s, t.., auf $\mathfrak{E}$, γ, δ, ε, ζ . . . giebt das combinatorische Integral

$$\int[\mathfrak{E}^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \zeta^t \ldots] = {}^n\mathrm{M}$$

$$\begin{matrix} p+q+r+s+t+\text{etc.} = m \\ 1p+2q+3r+4s+5t+\text{etc.} = n \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{E}, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots \\ 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \end{pmatrix}$$

Das Integral mit den Bedingungsgleichungen führt also auf die m^{te} Combinationsclasse für den untergesetzten Zeiger. Nämlich die Gleichung für n, bestimmt ${}^n\mathrm{J}$ (99). Von den Combinationsclassen ${}^n\mathrm{A}$, ${}^n\mathrm{B}$, ${}^n\mathrm{C}$... dieser Involution kann aber, wegen der Gleichung für m, nur die m^{te} Classe, das ist ${}^n\mathrm{M} =$ statt finden.

Beyspiel. Für $m=6$ und $n=10$, wäre ${}^n\mathrm{M} = {}^{10}\mathrm{I}$, also, für obigen Zeiger,

	1	2	3	4	5	6
	p	q	r	s	t	u
$\mathfrak{E}^5 \zeta^1$	5	0	0	0	1	0
$\mathfrak{E}^4 \gamma^1 \varepsilon^1$	4	1	0	1	0	0
$\mathfrak{E}^4 \delta^2$	4	0	2	0	0	0
$\mathfrak{E}^3 \gamma^2 \delta^1$	3	2	1	0	0	0
$\mathfrak{E}^2 \gamma^4$	2	4	0	0	0	0
	$\mathfrak{E}$	γ	δ	ε	ζ	η
	1	2	3	4	5	6

Die Summe, 1) der Werthe der einzelnen p, q, r . . . ist hier überall $=6$; 2) und ihrer Producte $1p$, $2q$, $3r$ . . . überall $=10$. Eben so das Krampische Zahlentäfelchen (Sml. I. S. 112).

102. Wären (in 101) die Bedingungsgleichungen

$$p+q+r+s+\text{etc.} = m$$
$$1q+2r+3s+\text{etc.} = n$$

geben (86, I) so darf man nur, nach der zweyten Gleichung, ^{n}J oder $^{n}\mathfrak{J}$ entwickeln, und für jede Combination der zusammengehörigen Werthe von p, q, . . die Ergänzung zu m, als den Werth für p, hinsetzen.

Exempel. Für $m = 10$, $n = 6$, wäre

$^{6}J = {}^{6}F + {}^{6}E + {}^{6}D + {}^{6}C + {}^{6}B + {}^{6}A$, also

	1	2	3	4	5	6	
. . . .	q	r	s	t	u	v	
. . . .	6	0	0	0	0	0	ε^6
. . . .	4	1	0	0	0	0	$\varepsilon^4 \gamma^1$
. . . .	3	0	1	0	0	0	$\varepsilon^3 \delta^1$
. . . .	2	2	0	0	0	0	$\varepsilon^2 \gamma^2$
. . . .	2	0	0	1	0	0	$\varepsilon^2 \vartheta^1$
. . . .	1	1	1	0	0	0	$\varepsilon^1 \gamma^1 \delta^1$
. . . .	0	3	0	0	0	0	γ^3
. . . .	1	0	0	0	1	0	$\varepsilon^1 \zeta^1$
. . . .	0	1	0	1	0	0	$\gamma^1 \vartheta^1$
. . . .	0	0	2	0	0	0	δ^2
. . . .	0	0	0	0	0	1	ζ^1
	ε	γ	δ	ϑ	ζ	η	
	1	2	3	4	5	6	

bey KRAMP (Sml. II. S. 364). Über die combinatische Behandlung dieser uud anderer ähnlichen Aufgaben (wie die in 92; 1, 2, 3) vergleiche man WEINTNERS Lehrb. der combin. Analysis. II Th. S. 133 f. f.

103. So viel hiervon, blos um zu zeigen, welche Erleichterung die Combinationslehre hier verschaft. Anwendungen solcher combinatorischen Integrale gehören nicht hieher; viele und vortreffliche hat Prof. KRAMP gegeben. Auch hat neuerlich Prof. ROTHE eine Theorie der combinatorischen Integrale und ihrer Anwendung versucht. Ihr Umfang erstreckt sich weit

und was mir davon von Zeit zu Zeit ist mitgetheilt worden, verdient grofse Aufmerksamkeit. Was man sich davon zu versprechen habe, mag folgender Auszug aus einem seiner neuesten Briefe aus Dresden darlegen.

„Ich habe wieder (schreibt er mir unterm 15. Jan. 1803) sehr viel an den combinatorischen Integralen gearbeitet, und ihre Theorie um ein Merkliches erweitert. Je weiter ich darinn fortschreite, desto mehr überzeuge ich mich von ihrer Wichtigkeit und Kraft. Durch sie ist es mir ganz neuerlich gelungen, die in §. VI. meiner Dissertation (*de Serierum Reversione*, 1793) gegebene allgemeine Summation, durch Zerlegung der Formel in ihre einfachsten Bestandtheile, ganz kurz zu erweisen. Allein ich mufste vorher die Betrachtung einer ganz besondern Art combinatorisscher Integrale voraus schicken. Ich habe viel Neues dadurch in kurzer Zeit gefunden, und ich halte sie für so wichtig, als die Involutionen. Ich weifs es, ich sage viel, aber ich glaube, es beweisen zu können. Ich werde sie auf das sogenannte Erhöhungsproblem anwenden, und ich hoffe, durch sie in Stand gesetzt zu werden, dieses Problem (das aber immer nur ein specieller Fall oder Theil des weitläuftigen und vielumfassenden Eliminationsproblems ist) vollständig auflösen zu können. Vorher will ich aber noch Haubers Aufsatz darüber (Sml. II. c. a. A. Seite 232, f.) durchgehen und damit vergleichen."

„Sollte es nicht Zeit seyn, etwas darüber und über den Algorithmus, dessen diese neu gefundenen combinatorischen Integrale fähig sind, bekannt γ) zu ma-

γ) Das würde schon früher, in einem eignen Aufsatz zu diesem [illegible] geschehen seyn, der im Gefolge mehrerer, als drit[illegible] comb. anal. Abhandlungen, oder a[illegible]

chen? Ich bin gewifs überzeugt, sie werden die Aufmerksamkeit der Analysten auf sich ziehen."

„Zum Beweise, wie kurz durch sie gewisse Relationen oder Lehrsätze ausgedrückt werden können, führe ich nur die oben erwähnte Formel meiner Dissertation (§. VI) auf. Es ist nämlich das combinatorische Integral

$$\int \frac{s+\alpha c}{(f+\alpha d)(g-\alpha d)} \cdot q^{f+\alpha d} \varkappa(\alpha+1).\ q^{g-\alpha d} \varkappa(\mathfrak{G}+1)$$

$$\alpha + \mathfrak{G} = n$$

$$= \frac{s(f+g)+n(cf-ds)}{f(f+g)(g-nd)} \cdot q^{g+\mathfrak{G}} \varkappa(n+1)$$

Die Bedingungsgleichung ist hier $\alpha + \mathfrak{G} = n$

„Als Beyspiele von neuen Wahrheiten, die ich durch meine combinatorischen Integrale gefunden habe, mögen folgende dienen. δ) — Nur eins läfst sich hier mittheilen: die Summation nämlich, der unendlichen von PFAFF summirten Reihe (Arch. der Math. 5tes Heft, S. 73 §. 12). PFAFF summirt nämlich die dortige Reihe auf der linken Seite des Gleicheitszeichens, vermittelst einer andern, wo eine neue Scale U vorkommt, deren allgemeine Dependenz von der Scale u durch die Formel $U\varkappa n = n.u\varkappa(n+1)$ ausgedrückt wird. Ich habe aber gefunden, dafs, wenn p, r, s willkührliche Scalen bedeuten, dann

$$(rp^{f})\varkappa 1\,(sp^{g})\varkappa(n+1)+(rp^{f+d})\varkappa 2\,(sp^{g-d})\varkappa n$$
$$+(rp^{f+2d})\varkappa 3\,(sp^{g-2d})\varkappa(n-1)+\text{- - - -}$$
$$+(rp^{f+nd})\varkappa(n+1)\,(sp^{g-nd})\varkappa 1 = \frac{p^{f+g+1}}{p-1}.rs)\varkappa(n+1)$$

eytrage dazu, erschienen seyn würden, wenn der so rofse Aufenthalt beym Druck, die Ausgabe nicht zu lange erzögert hätte.

δ) Sie waren in einer Beylage aufgeführt, und würden hier, theils zu weitläuftig, theils, ohne beygefügte Erläuterung, nicht verständlich seyn. Nur eins davon kann ich hier mittheilen, und oben im Texte anführen.

welche Summation weit kürzer ist. P ist hier eine neue von p abhängige Scale, und die Dependenz derselben von der Scale p drückt die Formel

$$Px(n+1)=(1-nd)px(n+1)$$

aus, das heifst, es ist

$$P[px1,(1-d)px2,(1-2d)px3,(1-3d)px4,\ldots]^n$$

SIEBENTER ABSCHNITT.

Derivative und combinatorische Entwickelung der Producte zweyer oder mehrerer Polynomien, in Reihen, deren Glieder nach den Potenzen eines und desselben Buchstabens geordnet sind.

104. Ich werde mich über diesen Gegenstand, der mit dem vorigen in naher Verbindung stehet, kurz fassen, und will hier nur die einfachsten Reihen anführen. Es ist vortheilhaft, wie auch [no. 85] bemerkt wird, diesen Fall besonders abzuhandeln, theils, weil er sehr oft vorkommt, theils, weil er der Auflösung des verwikkeltern allgemeinen Falls zum Grunde liegt und sie erleichtert.

I. Derivative Entwickelung der Producte mehrerer Reihen [no. 86 — 92].

Sie soll gröfstentheils mit den eignen Worten ihres Verfassers (in einer freyen Übersetzung) vorgetragen werden. Man kann sich nicht deutlicher darüber erklären, als es dort geschehen ist.

105. Aufgabe. Das Product einer beliebigen Anzahl von einander ganz unabhängiger Polynomien, deren jedes nach Potenzen von x geordnet ist, in einer Reihe [illegible] Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

zu entwickeln.

Um von dem einfachsten Fall anzufangen, suche man zuerst das Product von zwey Reihen

$$(a + bx + cx^2 + \text{etc.}) \times (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$$

in der angegebenen Gestalt zu entwickeln.

Die Multiplication beyder Reihen giebt folgende, nach Potenzen von x geordnete, Glieder

$$\begin{array}{l|l|l|l} a\alpha + a\beta & x + a\gamma & x^2 + a\delta & x^3 \\ \quad + b\alpha & \quad + b\beta & \quad + b\gamma & \\ & \quad + c\alpha & \quad + c\beta & + \text{etc.} \\ & & \quad + d\alpha & \end{array}$$

Das Gesetz der Gröfsen, die hier in die Potenzen von x multiplicirt sind, ist ganz einfach; der Coefficient jeder unbestimmten Potenz, x^n, läfst sich leicht daraus übersehen.

Um diese Auflösung auf Derivationen zurück zu führen, bemerke man, dafs $b = \text{D}.a, c = \frac{\text{D}^2.a}{1.2}$, $d = \frac{\text{D}^3.a}{1.2.3}$, etc.; $\beta = \text{D}.\alpha, \gamma = \frac{\text{D}^2.\alpha}{1.2}$, $\delta = \frac{\text{D}^3.\alpha'}{1.2.3}$, etc.; $A = a\alpha$, welches der Anfang (*Origine*) der Derivationen ist, $B = \text{D}.(a\alpha)$, $C = \frac{\text{D}^2.(a\alpha)}{1.2}$, $D = \frac{\text{D}^3.(a\alpha)}{1.2.3}$, etc. Diese derivativen Ausdrücke statt der obigen Buchstaben gesetzt, geben

$$A = a\alpha$$

$$B = \mathrm{D}.(a\alpha) = a.\ \mathrm{D}.\alpha + \mathrm{D}.a.\alpha$$

$$C = \frac{\mathrm{D}^2.(a\alpha)}{1.2} = a.\frac{\mathrm{D}^2.\alpha}{1.2} + \mathrm{D}.a.\mathrm{D}.\alpha + \frac{\mathrm{D}^2.a}{1.2}.\alpha$$

$$D = \frac{\mathrm{D}^3.(a\alpha)}{1.2.3} = a.\frac{\mathrm{D}^3.\alpha}{1.2.3} + \mathrm{D}.a.\frac{\mathrm{D}^2\alpha}{1.2} + \frac{\mathrm{D}^2.a}{1.2}.\mathrm{D}.\alpha + \frac{\mathrm{D}^3.a}{1.2.3}.\alpha$$

106. Lehrsatz. Es seyen a und α von einander unabhängige Gröfsen, so wie ihre derivirten; die *dérivée divisée* (34) der Ordnung n des Products $a\alpha$, ist durch folgende Formel gegeben

$$\frac{\mathrm{D}^n.(a\alpha)}{1.2..n} = a.\frac{\mathrm{D}^n.\alpha}{1.2..n} + \mathrm{D}.a.\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} + \frac{\mathrm{D}^2.a}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.\alpha}{1.2..n-2} + \frac{\mathrm{D}^3.a}{1.2.3}.\frac{\mathrm{D}^{n-3}.\alpha}{1.2..n-3} + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^{n-1}.a}{1.2..n-1}.\mathrm{D}.\alpha + \frac{\mathrm{D}^n.a}{1.2..n}.\alpha$$

wo, abgesehen von den Divisoren $1.2.3\ldots$, die Glieder keine andern Zahlencoefficienten, als die Einheit haben.

107. Setzt man in diese Formel $n+1$ statt n, so kommt

$$\frac{\mathrm{D}^{n+1}.(a\alpha)}{1.2..n+1} = a.\frac{\mathrm{D}^{n+1}.\alpha}{1.2..n+1} + \mathrm{D}.a.\frac{\mathrm{D}^n.\alpha}{1.2..n} + \frac{\mathrm{D}^2.a}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} + \frac{\mathrm{D}^3.a}{1.2.3}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.\alpha}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^{n-1}.a}{1.2..n-1}.\frac{\mathrm{D}^2.\alpha}{1.2} + \frac{\mathrm{D}^n.a}{1.2..n}.\mathrm{D}.\alpha + \frac{\mathrm{D}^{n+1}.a}{1.2..n+1}.\alpha$$

Die Vergleichung dieser Formel mit der vorhergehenden, giebt folgende Derivationsregel

Aus den gegebenen Gliedern von $\frac{D^n.(a\alpha)}{1.2..n}$, *für unabhängige* a *und* α, *die Glieder von* $\frac{D^{n+1}.(a\alpha)}{1.2..n+1}$ *abzuleiten:* 1) *variire man in jedem einzelnen Gliede blos* α *oder seine* derivée, *und nehme davon die folgende* derivée divisée, *lasse aber* a *und seine* derivées *unverändert;* 2) *in dem einzigen Gliede, welches* α *und die höchste* derivée *von* a *enthält, variire man auch noch die* derivée *von* a, *und nehme davon die folgende* derivée divisée; *lasse aber den Factor* α, *wie er ist, unverändert.*

Vermittelst dieser Regel findet man nach und nach, genblicklich, aus $A = a\alpha$,

$B = a\beta + b\alpha$
$C = a\gamma + b\beta + c\alpha$
$D = a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha$
$E = a\varepsilon + b\delta + c\gamma + d\beta + \varepsilon\alpha$

s. w wie in (105).

Der Lehrsatz (106) und die obige Regel sind reichend, das Product oder jedes beliebige Glied s Products, jeder willkührlichen Menge von Polyno- en zu entwickeln; wie aus folgender Anwendung f Producte von drey und vier Polynomien deutlich ellen wird.

108. Das Product von drey Polynomien

$a + bx + cx^2 + bx^3 + \text{etc.}$
$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$
$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$

iner Reihe von der Gestalt

$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$

entwickeln.

Das Glied ohne x, oder $A = \mathfrak{a}\,a\,\alpha$, ist der Anfa (*origine*) der Derivationen. Man sehe das Produ $\mathfrak{a}\,a$ als eine einfache Gröfse p an, so, dafs $A = p\,\alpha$. D durch wird das Problem auf das vorhergehende zurüc geführt. Demnach ist (106)

$$A_n = \frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{a}\,a\,\alpha)}{1.2..n} = \frac{\mathrm{D}^n.(p\,\alpha)}{1.2..n}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{a}\,a.\ \frac{\mathrm{D}^n.\alpha.}{1.2..n} + \mathrm{D}.(\mathfrak{a}\,a).\ \frac{\mathrm{D}^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} + \frac{\mathrm{D}^2.(\mathfrak{a}\,a)}{1.2}.\ \frac{\mathrm{D}^{n-2}.\alpha}{1.2..n-} \\ + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^{n-1}.(\mathfrak{a}\,a)}{1.2..n-1}.\ \mathrm{D}.\alpha + \frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{a}\,a)}{1.2..n}.\ \alpha \end{array} \right.$$

Die Gröfsen, zwischen den kleinen Parenthesen, sin hier der Regel (107) unterworfen.

Das giebt eine sehr leichte derivative Entwickelun der Glieder nach der Ordnung, und man findet augen blicklich

$$A = \mathfrak{a}\,a.\alpha$$
$$B = \mathfrak{a}\,a.\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}\,b + \mathfrak{b}\,a)\alpha$$
$$C = \mathfrak{a}\,a.\gamma + (\mathfrak{a}\,b + \mathfrak{b}\,a)\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}\,c + \mathfrak{b}\,b + \mathfrak{c}\,a)\alpha$$
$$D = \mathfrak{a}\,a.\delta + (\mathfrak{a}\,b + \mathfrak{b}\,a)\gamma + (\mathfrak{a}\,c + \mathfrak{b}\,b + \mathfrak{c}\,a)\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}\,d + \mathfrak{b}\,c + \mathfrak{c}\,b + \mathfrak{d}\,a)\alpha$$

u. s. w. Es fällt in die Augen, dafs z. B. um E von abzuleiten, man in D nur die $\delta, \gamma, \mathfrak{E}, \alpha$ mit $\varepsilon, \delta, \gamma,$ respective vertauschen, und eine Derivation von d einzigen Gröfse $(\mathfrak{a}\,d + \mathfrak{b}\,c + \mathfrak{c}\,b + \mathfrak{d}\,a)$ machen dürf welche α multiplicirt.

109. Das Product von vier Polynomien

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc.}$$
$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$
$$\alpha + \mathfrak{E}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

in einer Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

zu entwickeln.

Der Anfang der Derivation ist $A = \mathfrak{A}\alpha\alpha.\alpha$. Diesen zerfälle man in die beyden Factoren $\mathfrak{A}\alpha\alpha$ und α, und betrachte $\mathfrak{A}\alpha\alpha$ als eine einfache Gröfse, so ist, nach dem Lehrsatz (106)

$$\frac{D^n}{1.2..n}(\mathfrak{A}\alpha\alpha.\alpha) = \mathfrak{A}\alpha\alpha.\frac{D^n.\alpha}{1.2..n} + D.(\mathfrak{A}\alpha\alpha.\frac{D^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1}$$
$$+\frac{D^2.(\mathfrak{A}\alpha\alpha)}{1.2}.\frac{D^{n-2}.\alpha}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{D^n.(\mathfrak{A}\alpha\alpha)}{1.2..n}.\alpha$$

man $D.(\mathfrak{A}\alpha\alpha)$, $\frac{D^2}{1.2}.(\mathfrak{A}\alpha\alpha)$ etc., wie vorher gezeigt worden ist, entwickelt.

Durch Derivation findet man die Coefficienten der successiven Glieder der Reihe, wie folget:

$$A = \mathfrak{A}\alpha\alpha.\alpha$$
$$B = \mathfrak{A}\alpha\alpha.\mathfrak{B} + [\mathfrak{A}\alpha.b + D.(\mathfrak{A}\alpha).\alpha]\alpha$$
$$= \mathfrak{A}\alpha\alpha.\mathfrak{B} + [\mathfrak{A}\alpha.b + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}\alpha)\alpha]\alpha$$
$$C = \mathfrak{A}\alpha\alpha.\gamma + [\mathfrak{A}\alpha.b + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}\alpha)\alpha]\mathfrak{B}$$
$$+ [\mathfrak{A}\alpha.c + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}\alpha)b + (\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}\alpha)\alpha]\alpha$$
$$D = \mathfrak{A}\alpha\alpha.\delta + [\mathfrak{A}\alpha.b + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}\alpha)\alpha]\gamma$$
$$+ [\mathfrak{A}\alpha.c + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}\alpha)b + (\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}\alpha)\alpha]\mathfrak{B}$$
$$+ [\mathfrak{A}\alpha.d + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}\alpha)c + (\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}\alpha)b + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b + \mathfrak{D}\alpha)\alpha]\alpha$$

u. s. w. Mit gehöriger Aufmerksamkeit auf die Einklammerungen (*emboîtemens*) fährt man mit gröfster Richtigkeit so weit fort als man will.

110. Zerlegte man $\mathfrak{A}\alpha\alpha\alpha$ in die beyden Factoren $\mathfrak{A}$ und $\alpha\alpha$, so fände man durch Derivation folgende, der Form nach von der vorhergehenden verschiedene, Entwickelung

$$\begin{aligned}
A &= \mathfrak{A}a.a\alpha \\
B &= \mathfrak{A}a(a\beta+b\alpha)+(\mathfrak{A}b+\mathfrak{B}a)a\alpha \\
C &= \mathfrak{A}a(a\gamma+b\beta+c\alpha)+(\mathfrak{A}b+\mathfrak{B}a)\times \\
&\quad (a\beta+b\alpha)+(\mathfrak{A}c+\mathfrak{B}b+\mathfrak{C}a)a\alpha \\
D &= \mathfrak{A}a(a\delta+b\gamma+c\beta+d\alpha) \\
&\quad +(\mathfrak{A}b+\mathfrak{B}a)(a\gamma+b\beta+c\alpha) \\
&\quad +(\mathfrak{A}c+\mathfrak{B}b+\mathfrak{C}a)(a\beta+b\alpha) \\
&\quad +(\mathfrak{A}b+\mathfrak{B}c+\mathfrak{C}b+\mathfrak{D}a)a\alpha
\end{aligned}$$

u. s. w.

111. Man kann $\mathfrak{A}aa\alpha$ auf dreyerley Art in Factoren abtheilen: nämlich

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{D^n.(\mathfrak{A}aa.\alpha)}{1.2..n} = \frac{D^n.(\mathfrak{A}a.a\alpha)}{1.2..n} = \frac{D^n.(\mathfrak{A}.aa\alpha)}{1.2..n} \\
&= \mathfrak{A}aa\,\frac{D^n.\alpha}{1.2..n} + D.(\mathfrak{A}aa).\frac{D^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} \\
&\quad + \frac{D^2.(\mathfrak{A}aa)}{1.2}.\frac{D^{n-2}\alpha}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{D^n.(\mathfrak{A}aa)}{1.2..n}.\alpha \\
&= \mathfrak{A}a\,\frac{D^n.(a\alpha)}{1.2..n} + D.(\mathfrak{A}a)\,\frac{D^{n-1}.(a\alpha)}{1.2..n-1} \\
&\quad + \frac{D^2.(\mathfrak{A}a)}{1.2}.\frac{D^{n-2}.(a\alpha)}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{D^n.(\mathfrak{A}a}{1.2..n}.a\alpha \\
&= \mathfrak{A}.\frac{D^n.(aa\alpha)}{1.2..n} + D.\mathfrak{A}\,\frac{D^{n-1}.(aa\alpha)}{1.2..n-1} \\
&\quad + \frac{D^2.\mathfrak{A}}{1.2}.\frac{D^{n-2}.(aa\alpha)}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{D^n.\mathfrak{A}}{1.2..n}.aa\alpha
\end{aligned}$$

112. Nichts ist leichter, als jedes verlangte Glied unabhängig von den vorhergehenden, durch Derivation zu entwickeln.

Exempel. Man verlangt das 5te Glied des Product der Polynomien

$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} +$ etc., $a + b + c +$ etc.,
$a + b + c +$ etc., $\alpha + \beta + \gamma +$ etc.

ier ist $A = \mathfrak{A}a\,a\,a$, der Anfang der Derivation; das

Glied wird durch $\frac{D^4.\mathfrak{A}a\,a\,a}{1.2.3.4}$ bezeichnet.

Eine erste Entwickelung giebt

$$A_4 = \mathfrak{A}a\,a.\alpha + D.(\mathfrak{A}a\,a)\beta + \frac{D^2.(\mathfrak{A}a\,a)}{1.2}.\gamma$$
$$+ \frac{D^3.(\mathfrak{A}a\,a)}{1.2.3}.\delta + \frac{D^4.(\mathfrak{A}a\,a)}{1.2.3.4}.\alpha$$

nd nun calculirt und derivirt man die Entwickelungen

on $D.(\mathfrak{A}a\,a)$, $\frac{D^2.(\mathfrak{A}a\,a)}{1.2}$, u. s. w. ohne Schwierig-

eit hinter einander, wie folget

$$D.(\mathfrak{A}a\,a) = \mathfrak{A}a.b + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)a$$
$$\frac{D^2.(\mathfrak{A}a\,a)}{1.2} = \mathfrak{A}a.c + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)b$$
$$+ (\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}a)a$$
$$\frac{D^3.(\mathfrak{A}a\,a)}{1.2.3} = \mathfrak{A}a.d + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)c + (\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}a)b$$
$$+ (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b + \mathfrak{D}a)a$$
$$\frac{D^4.(\mathfrak{A}a\,a)}{1.2.34} = \mathfrak{A}a.e + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)d + (\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}a)c$$
$$+ (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b + \mathfrak{D}a)b$$
$$+ (\mathfrak{A}e + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c + \mathfrak{D}b + \mathfrak{E}a)a$$

findet man für A_4, ganz entwickelt,

$$A_4 = \mathfrak{A}a\,a.\alpha + [\mathfrak{A}a\,b + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)a]\beta$$
$$+ [\mathfrak{A}a\,c + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)b + (\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}a)a]\gamma$$
$$+ [\mathfrak{A}a\,d + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{A}a)c + (\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}a)b$$
$$+ (\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b + \mathfrak{D}a)a]\delta$$
$$+ [\mathfrak{A}a\,e + (\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)d + (\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}a)c$$
$$+ (\mathfrak{A}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}c + \mathfrak{C}b + \mathfrak{D}a)b$$
$$+ (\mathfrak{A}e + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c + \mathfrak{D}b + \mathfrak{E}a)a]\alpha$$

113. Aus den generellen Formeln (106, 107) läfst sich noch nachstehende Regel folgern, um eine *dérivée divisée* aus der *dérivée divisée* der zunächst höhern Ordnung abzuleiten:

Um von der gegebenen Entwickelung von $\frac{D^n.(a^x)}{1.2..n}$

auf die von $\frac{D^{n-1}.(a^x)}{1.2..n-1}$ *herabzusteigen, werfe man das Glied weg, worinn* a *mit der höchsten* dérivée divisée *von* a *multiplicirt ist, und vertausche in den übrigen Gliedern jede* dérivée divisée *von* a, *mit der zugehörigen* derivée divisée inverse. (73. p. 243).

Diese Regel gehörig ausgedehnt, erstreckt sich auf die *dérivées* eines Products von jeder willkührlichen Anzahl polynomischer Factoren; wie man finden wird, wenn man sie auf die Fälle (108, 109) anwendet und bemerkt, wie jede der Gröfsen $A, B, C, D, \ldots$, aus der unmittelbar folgenden derivirt.

So weit der Arbogastische Vortrag. Ich gehe nun zu den combinatorischen Darstellungen fort.

II. Combinatorische Entwickelung der Producte mehrerer Reihen.

114. Vorerinnerungen.

1. Zwey, drey, vier oder mehrere Reihen multipliciren, heifst die möglichen Binionen, Ternionen, Quaternionen, u. s. w. aus ihren Gliedern aufstellen. Eine gewisse Ordnung dabey zu beobachten, setze man die Glieder einer und derselben Reihe immer in eine und dieselbe Stelle der einzelnen Producte oder Complexionen.

2. Sollen die Glieder, wie hier erfordert wird (105) nach Potenzen einer veränderlichen Gröfse (x) fortgehen, so können nur diejenigen Producte der Coeffi-

cienten der einzelnen Reihen, zu einer und derselben Potenz von x gehören, deren Zahlenwerthe, nach dem gemeinschaftlichen Zeiger, einerley Summe ausmachen.

3. Das führt, weil dabey Verwechselungen s) vorkommen, auf Variationen zu bestimmten Summen, für bestimmte Reihen. Bezeichnet man nun die Variationsclassen nach der Ordnung durch grofse lateinische Cursivbuchstaben, A, B, C, D, . . . M, setzt den Summenexponenten oben linker Hand zur Seite, die Reihenbuchstaben p, q, r, s . . . darüber und den Zeiger darunter: so sind Ausdrücke, wie folgende

$$\overset{pq}{{}^{5}B},\quad \overset{pqr}{{}^{6}C},\quad \overset{pqrs}{{}^{10}D},\quad \ldots\ldots\quad \overset{pqrst\ldots}{{}^{n}M}$$

sehr verständliche Zeichen. Der Zeiger ist hier nicht beygefügt worden; er bezieht sich immer auf die Coefficienten der Reihen p, q, r, s, ... die für bestimmte Fälle bestimmt angegeben werden.

115. Aufgabe. Es sind mehrere, nach Potenzen von x geordnete, von einander unabhängige, Reihen p, q, r, s, . . .

$$\begin{array}{l}
\overset{1}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{\mathfrak{B}}x + \overset{3}{\mathfrak{C}}x^2 + \overset{4}{\mathfrak{D}}x^3 + \text{etc.} = s \\
\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc.} = r \\
a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} = q \\
\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} = p \\
\quad s \qquad s \qquad s \qquad s \qquad s \qquad s
\end{array}$$

mit dem überschriebenen, allen Coefficienten gemeinschaftlichen Zeiger 1, 2, 3, 4 . . . gegeben: man

s) Denn, wenn in einer Classe, z. B. der dritten, die Complexion $\mathfrak{a}b\gamma$ vorkommt, so müssen darinn auch die gleichnamigen (aus den ersten drey Buchstaben bestehenden) über verwechselten $\mathfrak{a}c\beta$, $\mathfrak{b}a\gamma$, $\mathfrak{b}c\alpha$, $\mathfrak{c}a\beta$, $\mathfrak{c}b\alpha$, vorkommen, weil diese, nach dem gemeinschaftlichen Zeiger, sämtlich zu einer und derselben Summe gehören.

verlangt das allgemeine $(n+1)^{te}$ Glied der, gleichfalls nach Potenzen von x geordneten, Producte von zwey, drey, vier . . . m dieser Reihen von den vorhergehenden niedrigern Producten und Gliedern, wie man will, abhängig oder unabhängig, darzustellen.

116. Auflösung Diese geben die Variationsclassen nach der Reihe (114, 3). Es ist nämlich

$$(qp)\urcorner(n+1) = {}^{n}+{}^{2}\overset{qp}{B}x^{n} \qquad (srqp)\urcorner(n+1) = {}^{n}+{}^{4}\overset{srqp}{D}x^{n}$$

$$(rqp)\urcorner(n+1) = {}^{n}+{}^{3}\overset{rqp}{C}x^{n} \qquad (\ldots srqp)\urcorner(n+1) = {}^{n}+{}^{m}\overset{\ldots srqp}{M}x^{n}$$

(Der Zeiger ist hier wie in 115).

Die über die Classenzeichen $B, C, D, \ldots, M$ geschriebenen Reihenbuchstaben $p, q, r, s \ldots$ zeigen zugleich die Stellen der Complexionen an, in die man, bey Entwickelung der Classen, die Coefficienten dieser Reihen zu setzen hat; z. B. hier, die Coefficienten aus p in die letzte; die aus q in die vorletzte; die aus r in die vorvorletzte u. s. w. Stelle der zusammengehörigen Complexionen der Classen. Dadurch wird die (in 114, 1) empfohlene Ordnung beobachtet.

117. Beweis. Dafs für die $(n+1)^{ten}$ Glieder der Producte aus zwey, drey, vier, . . . m Reihen immer α^{n} kommen müsse, ist für sich klar. Nun fangen die Verbindungen der Coefficienten in Beziehung auf den Zeiger, bey zwey Reihen qp von ${}^{2}\overset{qp}{B} = a\alpha$, bey drey Reihen rqp von ${}^{3}\overset{rqp}{C} = a a \alpha$, bey vier Reihen $srqp$ von ${}^{4}\overset{srqp}{D} = \mathfrak{A} a a \alpha$, bey m Reihen . . . $srqp$ von ${}^{m}\overset{\ldots srqp}{M} = \ldots \mathfrak{A} a a \alpha$, an, und gehen bey ihnen die Summenexponenten der Classen (wie die Potenzexponenten von x) nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort. Folglich gehören für die $(n+1)^{ten}$ Glieder der Producte der Reihen, die Variationsclassen mit ihren Summen-

exponenten und die Potenzen x^n, so zusammen, wie in (116) ist angegeben worden.

118. Setzt man in die allgemeinen $(n+1)^{\text{tem}}$ Glieder, nach und nach $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ so findet man dieser Producte einzelne Glieder nach der Ordnung, nämlich

$$qp = {}^{qp}_{2}B + {}^{qp}_{3}Bx + {}^{qp}_{4}Bx^2 + {}^{qp}_{5}Bx^3 + \text{etc.}$$

$$rqp = {}^{rqp}_{3}C + {}^{rqp}_{4}Cx + {}^{rqp}_{5}Cx^2 + {}^{rqp}_{6}Cx^3 + \text{etc.}$$

$$srqp = {}^{srqp}_{4}D + {}^{srqp}_{5}Dx + {}^{srqp}_{6}Dx^2 + {}^{srqp}_{7}Dx^3 + \text{etc.}$$

$$\ldots srqp = {}^{\ldots srqp}_{m}M + {}^{\ldots srqp}_{m+1}Mx + {}^{\ldots srqp}_{m+2}Mx^2 + {}^{\ldots srqp}_{m+3}Mx^3 + \text{etc.}$$

Hier gehen $m, m+1, m+2, \ldots$ die Summenexponenten der Classen, und $0, 1, 2 \ldots$ die Potenzexponenten von x, nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort (117).

119. Noch mufs gezeigt werden, wie die Complexionen oder die einzelnen Glieder der Classen (116, 118) aus den Coefficienten der Reihen p, q, r, s zu den vorgeschriebenen Summen sich zusammen setzen lassen. Nachdem die Darstellung der Glieder einer verlangten Classe, auf andere vorhergegangene Beziehung hat oder nicht, nachdem wird auch die Aufgabe (115) abhängig oder unabhängig gelöset werden.

Zuförderst will ich eine so genannte independente[2]) Auflösung aufstellen, wodurch man jede verlangte Classe (jedes verlangte Glied eines Products der Reihen) auser der Ordnung finden kann, ohne von den vorhergehenden Classen oder Gliedern etwas zu kennen, oder zu gebrauchen. Daraus werden sich, gleichsam von

2) Wegen solcher independenten Auflösungen vergleiche man Erst. Anh. 7 und die dortige Anmerkung.

selbst, mehrere Dependenzen, folglich auch abhängige Auflösungen, ergeben.

120. Aufgabe. Die Complexionen einer beliebigen, auf die Reihen $p, q, r, s \ldots$ (115) und den dortigen Zeiger bezogenen, Variationsclasse, z. B. ${}^{srqp}D$, ausser der Ordnung, und von vorhergehenden unabhängig, zu finden.

Auflösung. Die erste gut geordnete Complexion der vorgegebenen vierten Classe zur Summe 6 ist offenbar, in Zahlen 1113, in Buchstaben $\mathfrak{A}\,a\,a\gamma$. Aus dieser Anfangscomplexion fliefsen alle übrigen, wie folget:

s	r	q	p
$\mathfrak{A}$	a	a	γ
$\mathfrak{A}$	a	b	β
$\mathfrak{A}$	a	c	α
$\mathfrak{A}$	b	a	β
$\mathfrak{A}$	b	b	α
$\mathfrak{A}$	c	a	α
$\mathfrak{B}$	a	a	β
$\mathfrak{B}$	a	b	α
$\mathfrak{B}$	b	a	α
$\mathfrak{C}$	a	a	α

I. Das höchste der gegebenen Elemente, hier γ, aus der Reihe p, setze man als einzelnes Ding im Winkel.

II. Diesem höchsten Elemente γ setze man den ersten Coefficienten a aus q vor; dann vertausche man das so eben vorgesetzte Element mit dem nächst höhern, und das daneben stehende zweyte mit dem nächst niedrigern, und fahre so fort, bis das letzte Element α wird, so erhält man die Binionen $a\gamma$, $b\beta$, $c\alpha$, im zweyten Winkel.

III. Den einzelnen Binionen in II setze man den ersten Coefficienten a aus r vor. Das giebt die Ordnung $\mathfrak{a}$ der Ternionen; und daraus findet man weiter, durch Vertauschung des vorgesetzten Elements mit dem nächst höhern, und des letzten mit dem nächst niedrigern (mit Übergehung der Complexionen, die sich auf α endigen) die Ordnung $\mathfrak{b}$, und daraus auf eben die Art die Ordnung $\mathfrak{c}$, und so alle Ternionen $a\,a\gamma$, u. s. w. bis mit $c\,a\,\alpha$, im dritten Winkel.

IV. Eben so (durch Vorsetzung des ersten Coefficienten $\mathfrak{A}$ aus s, vor alle Ternionen, und durch gehörige Umtauschung der vorgeschriebenen und der letzten Buchstaben, nach III) geht man zu den Quaternionen und ihren Ordnungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, für die verlangte Classe fort; und so auch zu Verbindungen von mehr als vier Buchstaben, für höhere Classen, wenn dergleichen gefordert werden,

Beweis. Diese Auflösung ist keine andere, als die vorlängst bekannte Regel zu Auffindung der Variationscomplexionen zu bestimmten Summen, nur auf mehrere Reihen $p, q, r, s \ldots$ angewendet (Samml. I. S. 187; 49. vergl. S. 181; 24 und S. 186; 47). Man verfährt nämlich so, als ob nur eine Reihe gegeben wäre, setzt aber für die Buchstaben dieser einen Reihe, nach und nach die gleichnamigen Buchstaben der verschiedenen Reihen in die ihnen zugehörigen Stellen (116). Ein hierher gehöriges Beyspiel für eine Reihe, aber in Zahlen 0, 1, 2 ist schon (97) da gewesen.

121. Die Winkel, wie hier geschehen, zu ziehen, ist eben nicht nothwendig; wohl aber bequem, und wegen Nachweisung der Involutionen nützlich. Nämlich: aus der Union γ im ersten Winkel, deriviren die Binionen im zweyten; daraus die Ternionen im dritten Winkel; und daraus zuletzt die Quaternionen der verlangten Variationsclasse. Vergleicht man die hier (120) gefundenen Complexionen mit dem Werthe von $\mathfrak{C}$ bey Arbogast (109), so findet man bey beyden die Ordnung verschieden. Lieset man aber meine Complexionen vorwärts, von der ersten bis zur letzten herunter, die Arbogastischen rückwärts, von der letzten bis zur ersten herauf, so zeigt sich dabey die merkwürdige Erscheinung, dafs beyde Darstellungen, die meinige von oben herunter, die Arbogastische von unten herauf, involutorisch sind. Das wird

aus folgenden beyden Beyspielen, durch unmittelbare Nebeneinanderstellung der Complexionen, und Ziehung der Involutionswinkel noch deutlicher erhellen.

122. Aufgabe. Den vierten Coefficienten des Products s, r, q, p, oder $^{7}D^{srqp}$ involutorisch darzustellen.

Auflösung. Die erste gut geordnete Complexion der verlangten Classe und Summe ist $\mathfrak{A}aa\delta$. Hier kommt also δ an die Stelle von γ in (120, I); und wenn man das dort weiter angewiesene Verfahren (II, III, IV) hierauf anwendet, so erhält man meine Involution C, wie solche der Arbogastischen A gegenüber (im zweyten Anhange, Tafel IV) involutorisch entwickelt ist. Zwischen beyden liegt die Zahleninvolution B, zu beliebiger Vergleichung mit meiner Buchstabeninvolution C. Ich habe dazu die Tafel IV des zweyten Anhangs gewählt, weil sich dort alles bequemer neben einander stellen und mit einander vergleichen läfst. Die Erscheinung wegen der beyderley Involutionen nach entgegen gesetzter Richtung (121), wie auch die gezogenen Winkel nachweisen, ist dort unter den beyden Anordnungen A. C bemerkt.

123. Setzt man bey Entwickelung der Complexionen anstatt sie, wie bey C, unter einander zu schreiben, selbige in die figürliche Anordnung D. (a.a.O.) neben und unter einander, wie ich bereits im *Nov. Syst. Permutt. p.* LXXV gethan habe: so ist diese Darstellung beydes, nach Anfangs- und Endbuchstaben geordnet, und mehrere, gemeinschaftliche Factoren, Zerlegungen und Dependenzen fallen dabey von selbst in die Augen. So übersieht man z. B. sogleich:

I. Dafs

$$^{7}D^{srqp} = {}^{3}C^{srq}.\delta + {}^{4}C^{srq}.\gamma + {}^{5}C^{srq}.\beta + {}^{6}C^{srq}.\alpha$$

in Satz, der sich sogleich und ohne Schwierigkeit, für de Classe und jede Summe allgemein ausdrücken läfst; obey man mit Nutzen meine Distanzexponenten anenden, und $\beta = {}^{1}\alpha$, $\gamma = {}^{2}\alpha$, $\delta = {}^{3}\alpha$, etc. setzen kann. Vollte man ferner,

II. Das Product $srqp$, wie es hier in I durch $rq.p$ ausgedrückt ist, durch $sr.qp$ ausdrücken, so önnte das so geschehen, wie es (a. a. O,) unter der gürlichen Anordnung D angegeben worden. Es ist ämlich in combinatorischen Zeichen

$$ {}^{srqp}_{7}D = {}^{sr}_{3}B.{}^{qp}_{5}B + {}^{sr}_{3}B.{}^{qp}_{4}B + {}^{sr}_{4}B.{}^{qp}_{3}B + {}^{sr}_{5}B.{}^{qp}_{2}B $$

Diese Formel gibt den Werth von D bey ARBOGAST (110).

124. Aufgabe. Den fünften Coefficienten des roducts $srqp$, oder ${}^{srqp}_{5}D$, involutorisch darzustellen.

Auflösung. Die erste, gut geordnete Complexion er verlangten Classe und Summe ist $2aaa$. Hier steht lso s an der Stelle von γ (in 120, I), und wenn man as dort weiter angewiesene Verfahren (II, III, IV) hierauf anwendet, so erhält man (Zw. Anh. Taf. IV) meine nvolution G, der Arbogastischen E gegenüber. Zwichen beyden liegt die Involution F, wie sie nur für ine Reihe p kommen würde, zu beliebiger Vergleichung mit meinem G für mehrere Reihen p, q, r, s. Die figürliche Anordnung H ist wie im *Nov. Syst. Perm.* LXXV, C. Was übrigens (in 123, I, II) bemerkt worden ist, findet auch hier seine Anwendung. Die derivative Aufsuchung dieses Gliedes hat ARBOGAST (112) als ein Beyspiel eines independenten Verfahrens aufgestellt. Nach der Zerfällung in (123, I) ist

$$ {}^{srqp}_{5}D = {}^{srq}_{3}C.s + {}^{srq}_{4}C.\delta + {}^{srq}_{5}C.\gamma + {}^{srq}_{6}C.\beta + {}^{srq}_{7}C.\alpha $$

Ich habe die Aufgaben (120, 122, 124) mit Fleifs gewählt und auf einander folgen lassen, um den inve-

lutorischen Gang daran zu erläutern, weil Classen steigenden Summenexponenten am besten dazu ge net sind.

Hier noch einige Vergleichung der derivativen combinatorischen in diesem Abschnitte vorkommen Zeichen.

125. Es ist

$$a = \mathrm{D}^0.\, a = \overset{0}{a} \qquad d = \frac{\mathrm{D}^3.\, a}{1.2.3} = \overset{3}{a}$$

$$b = \mathrm{D}.\, a = \overset{1}{a} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

$$e = \frac{\mathrm{D}^2.\, a}{1.2} = \overset{2}{a} \qquad \overset{n}{a} = \frac{\mathrm{D}^n.\, a}{1.2.3..n} = \overset{n}{a}$$

Die kleinen Zahlen über a sind meine Distanzexponenten, und $\overset{n}{a} = \frac{\mathrm{D}^n.\, a}{1.2.3..n}$ bedeutet also den $(n+1)^{\text{ten}}$ Buchstaben, vom Anfange an, a als den erste gezählt.

126. Für zwey Reihen qp (115) ist

$$(a\alpha) = (qp)\varkappa 1 = \overset{qp}{{}^1B} = a\alpha$$

$$\mathrm{D}.(a\alpha) = (qp)\varkappa 2 = \overset{qp}{{}^2B} = a\mathfrak{C} + b\alpha$$

$$\frac{\mathrm{D}^2.(a\alpha)}{1.2} = (qp)\varkappa 3 = \overset{qp}{{}^3B} = a\gamma + b\mathfrak{C} + c\alpha$$

$$\frac{\mathrm{D}^3.(a\alpha)}{1.2.3} = (qp)\varkappa 4 = \overset{qp}{{}^4B} = a\delta + b\gamma + c\mathfrak{C} + d$$

$$\frac{\mathrm{D}^n.(a\alpha)}{1.2.3..n} = (qp)\varkappa(n+1) = \overset{qp}{{}^{n+1}B}$$

$$= \overset{0}{a}\overset{n}{\alpha} + \overset{1}{a}\overset{n-1}{\alpha} + \overset{2}{a}\overset{n-2}{\alpha} + \text{etc.} + \overset{n-1}{a}\overset{1}{\alpha} + \overset{n}{a}\overset{0}{\alpha}$$

127. Für drey Reihen rqp (115) ist

$$(a\,a.\,a) = (rqp)\varkappa 1 = {}^{rqp}3C = {}^{rq}2B\,a$$

$$(a\,a.\,a) = (rqp)\varkappa 2 = {}^{rqp}4C = {}^{rq}2B\,\mathfrak{C} + {}^{rq}3B\,a$$

$$\frac{{}^{2}.(a\,a.\,a)}{1.2} = (rqp)\varkappa 3 = {}^{rqp}5C = {}^{rq}2B\,\gamma + {}^{rq}3B\,\mathfrak{C} + {}^{rq}4B\,a$$

$$\frac{{}^{n}.(a\,a.\,a)}{1.2..n} = (rqp)\varkappa(n+1) = {}^{rqp}{}_{n+3}C$$

$$= {}^{rq\ n}2B\,a + {}^{rq\ n-1}3B\,a + {}^{rq\ n-2}4B\,a + \text{etc.} + {}^{rq\ 0}{}_{n+2}B\,a$$

128. Für vier Reihen $srqp$ (115) ist

$$(\mathfrak{A}\,a\,a.\,a) = (srqp)\varkappa 1 = {}^{srqp}4D = {}^{srq}3C\,a$$

$$(\mathfrak{A}\,a\,a.\,a) = (srqp)\varkappa 2 = {}^{srqp}5D = {}^{srq}3C\,\mathfrak{C} + {}^{srq}4C\,a$$

$$\frac{(\mathfrak{A}\,a\,a.\,a)}{1.2} = (srqp)\varkappa 3 = {}^{srqp}6D = {}^{srq}3C\,\gamma + {}^{srq}4C\,\mathfrak{C} + {}^{srq}5C\,a$$

$$\frac{{}^{2}.(\mathfrak{A}\,a\,a.\,a)}{1.2..n} = (srqp)\varkappa(n+1) = {}^{srqp}{}_{n+4}D$$

$$= {}^{srq\ n}3C\,a + {}^{srq\ n-1}4C\,a + {}^{srq\ n-2}5C\,a + \text{etc.} + {}^{srq\ 0}{}_{n+3}C\,a$$

Und so auch bey mehr als vier Reihen, für die das Fortgangsgesetz ohne Schwierigkeit in die Augen fällt. Läfst sich alles schon aus dem ganz einfachen Gesetze (126) ableiten, wenn man die α, β, γ, δ ... beybehält, wie sie dort stehen, und statt der a, b, c, d ... die Classen, ${}^{rq}B$ bey drey Reihen rqp, und ${}^{srq}C$ bey vier Reihen $srqp$, und so weiter bey mehreren Reihen, jedesmal von der niedrigsten Summe an, substituirt.

Auch ist, alles durch zweyte Classen ausgedrückt

$$\frac{D^n.(\mathfrak{A}a.a\alpha)}{1.2..n} = (srqp)\,\alpha\,(\alpha+1)$$

$$= {}^{sr}{}_{5}B.{}^{n}+{}^{qp}{}_{2}B + {}^{sr}{}_{3}B.{}^{n}+{}^{qp}{}_{1}B + {}^{sr}{}_{4}B.{}^{n}{}^{qp}{}_{2}B + \text{etc.} + {}^{n}+{}^{sr}{}_{2}B.{}^{qp}{}_{2}B$$

129. In (120) folgen
aus der Union $\gamma = {}^{3}A$, im ersten Winkel;
die Binionen ${}^{4}B$, im zweyten Winkel; daraus
die Ternionen ${}^{5}C$, im dritten Winkel; daraus
die Quaternionen ${}^{6}D$, im vierten Winkel; u. s w.
wo der Summenexponent für jede zunächst folgende Variationsclasse um 1 höher ist; gerade so, wie bey den Combinationsclassen (Erst. Anh. 11, und die dortigen Bemerkungen in 12)

$$\left|\begin{array}{l} {}^{qp}{}_{5}B \\ \hline \end{array}\right. = {}^{qp}{}_{5}B$$

$$\left|\begin{array}{ll} {}^{r}\mathfrak{a} & {}^{qp}{}_{5}B \\ \mathfrak{b} & {}^{4}B \\ \mathfrak{c} & {}^{3}B \\ \mathfrak{d} & {}^{2}B \\ \hline \end{array}\right. = {}^{rqp}{}_{6}C$$

$$\left|\begin{array}{ll} {}^{s}\mathfrak{A} & {}^{rqp}{}_{6}C \\ \mathfrak{B} & {}^{5}C \\ \mathfrak{C} & {}^{4}C \\ \mathfrak{D} & {}^{3}C \\ \hline \end{array}\right. = {}^{srqp}{}_{7}D$$

u. s. w. f.

130. In der Anordnung (120, und im zweyt. Anhang Taf. C, F) werden Summen einer Complexionen, wie sie in den dortigen Winkeln stehen, involvirt. An ihrer Stelle involvire man nun die zugehörigen Variationsclassen selbst mit ihren Zeichen, von der zweyten B an (eigentlich kann man die Involution anfangen, von welcher Classe man will) so kommt die involutorische Darstellung, wie sie hier zur Seite steht; in welcher ich die Winkel mit ihren Füllungen, zu mehrerer Deutlichkeit, etwas von einander abgerückt habe. Auch stehen die Reihenbuch-

aben hier nur über den ersten Gliedern, zugleich als Nachweisung für die übrigen. Hier ist also

$$^{rqp}_{6}C = \mathfrak{a}\,^{qp}_{5}B + \mathfrak{b}\,^{qp}_{4}B + \mathfrak{c}\,^{qp}_{3}B + \mathfrak{d}\,^{qp}_{2}B$$

$$^{srqp}_{7}D = \mathfrak{A}\,^{rqp}_{6}C + \mathfrak{B}\,^{rqp}_{5}C + \mathfrak{C}\,^{rqp}_{4}C + \mathfrak{D}\,^{rqp}_{3}C$$

er Form nach mit (127. 128) vollkommen übereinstimmend. Hier sind nämlich die Anfangsbuchstaben , b, c, d; A, B, C, D; dort die Endbuchstaben , β, γ, δ mit den Classen verbunden, angegeben, welches zu denselben Complexionen führt, weil $.qp = rq.p = rqp$, und eben so $s.rqp = srq.p = srqp$.

131. Diese Involution der Classen führt also gerade zu auf zerlegende Formeln, wie in (120. I; 126–28) vorkommen. Eben so kann man auch Producte on Classen involviren, und dadurch Ausdrücke von roducten der Classen aller Art erhalten, wie in (123. I; 128.) nur von der zweyten Classe vorkommen. Ich ill mich aber dabey nicht aufhalten, und nur noch des *Methodi Productorum*, wie ich ihn nenne, eines Verhrens, dem ähnlich, was der *Methodus Potentiarum* eigt, Erwähnung thun, wovon die Formel im *Nov. ystem. Perm. p.* LXXVI, E, 9 steht,

ACHTER ABSCHNITT.

e combinatorische Evolution der Polynomialgröfsen ist analytisch, auch sind die combinatorischen Involutionen und Deductionen wahre Derivationen, und zugleich die leichtesten ihrer Art.

132. Dafs die Polynomialgröfsen mit unübertrefflier Leichtigkeit combinatorisch sich darstellen lassen, nach dem, was im Vorhergehenden darüber beyge-

bracht worden ist, nicht dem geringsten Zweifel un
worfen. Sind aber diese Darstellungen auch analytis
Diese Frage hat bereits der Conferenzrath Tetens
neint (Sml. I. S. 2, 3), in so fern er die combinat
schen Operationen in der Analysis für fremd ansi
giebt aber doch zu, man könne sie eben sowohl u
die analytischen Methoden aufnehmen, als das Di
rentiiren und Integriren. Was Prof. Pfaff auf j
Äusserung „die combinatorischen Operationen se
der Analysis fremd" erwiedert hat, darüber kann n
im Archiv der Mathematik (Heft VII, S. 348) nach
hen. Auch Prof Arbogast erklärt das bey Entwick
lung und Darstellung der Polynomialgröfsen angebra
te combinatorische Verfahren für *moins analytique*. I
Gründe, die ihn zu diesem Ausspruch bewogen hab
stehen nicht an der Stelle, wo er ihn ausdrückli
äussert [nó. 52] sondern in der Vorrede seines Wer
[Seite v], wo die derivativen Verfahren mit den co
binatorischen verglichen, und die ersten den letzte
vorgezogen werden. Sie beruhen auf folgendem:

1) Der Derivationscalcul giebt die Glieder der
lynomialgröfsen durch eine zusammenhängende Re
nung, Buchstabenproducte und ihre numerischen Co
ficienten, beyde zusammen auf einmal. In der com
natorischen Analysis hingegen werden diese Grö
stückweise gefunden, zuerst die Litteralproducte, d
die zugehörigen numerischen Coefficienten (die V
setzungszahlen).

2) Der Derivationscalcul bedarf keiner zum
aus berechneten Combinationstafeln, noch anderer,
wissermafsen mechanischen, Hülfsmittel durch Vert
lung in Fächer, um dadurch die Gruppen der Poly
mialgröfsen zu formiren.

3) Die Derivationsrechnung leitet durch einen
sammenhängenden Calcul eine Polynomialgröfse
dern her, und stellt sie ganz reducirt auf; a

mit solcher Leichtigkeit, dafs dabey nichts weiter als die Mühe des Schreibens in Anschlag kommt.

133. Darauf ist zu erwiedern:

1) Was den ersten Punct anbetrifft, so mufs ich mich vorläufig auf die ausführliche Erklärung berufen, die ich (Sml. II. S. 62, 63 Note k, und in den darinn citirten Stellen) gegeben habe. Ich halte, mit mehrern Analysten, noch immer dafür, es sey einfacher und leichter, zuerst die Literalproducte darzustellen, und ihnen nachher die numerischen Coefficienten beyzufügen. Die Aufstellung beyder zusammen, durch eine und dieselbe Regel, theilt schon die Aufmerksamkeit und macht das Gesetz dafür etwas verwickelter, weil Literalproducte und ihre Versetzungszahlen ganz verschiedene Elemente sind; die einen auf die Gestalt der Complexionen, die andern auf ihre Menge, Beziehung haben. Es scheint demnach besser zu seyn, wenigstens ist es bequemer, diese Elemente von einander abgesondert, als mit einander vereinigt, in Betrachtung zu ziehen. Dafs aber die reincombinatorischen Operationen und Involutionen, durch welche die Polynomialgröfsen dargestellt werden, wirklich analytisch sind, kann nicht in Zweifel gezogen werden, weil sonst mehrere Arbogastische *Règles* [z. B. n. 30, 36, 43, 47] die mit meinen combinatorischen Vorschriften genau übereinstimmen, auch nicht analytisch seyn würden, da sie doch Resultate zusammenhängender, ganz unbestritten analytischer Arbeiten sind.

2) Was die zweyte Aeusserung anbetrifft, so beruht selbige auf der Voraussetzung, als ob die combinatorische Analysis solcher zum voraus berechneter Combinationstafeln und Vertheilung der Gröfsen in solcher unumgänglich nöthig habe, und sie nicht ent-

behren könne. Keinesweges. Sie entwickelt die Formeln und die darinn enthaltenen combinatorischen Ausdrücke sogleich an Ort und Stelle, wo sie gebraucht werden, ohne alle Beyhülfe von Tafeln und andern mechanischen Hülfsmitteln. Wenn Combinationstafeln aufgestellt werden, so geschieht es blos der Bequemlichkeit wegen, auch noch die an sich leichten Regeln der Darstellung entbehrlich zu machen, die man sonst befolgen müfste. Ueberdies dienen sie zur Vergleichung und Verificirung des Gefundenen, weil es doch möglich ist, bey der Anwendung noch so leichter Verfahren sich zu versehen. Die hin und wieder aufgestellte Vertheilung der Gröfsen in Fächer, ist eben so an sich entbehrlich, als es die vorher-berechneten Combinationstafeln sind; die Resultate, die man braucht, hängen keinesweges davon ab. Aber eine solche Vertheilung ist ein vortreffliches Mittel, den Zusammenhang des Ganzen durch eine anschauliche Darstellung der einzelnen Theile und ihrer Verbindung unter einander mit einem Blicke zu übersehen. Ein paar Beyspiele werden hier nicht überflüssig seyn.

In der ersten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen wird (S. 202) eine Tafel der Combinationen zu unbestimmten Summen n, in lexikographischer Ordnung mitgetheilt, welche das Ableitungsgesetz folgender Glieder aus vorhergehenden deutlich vor Augen legt, und als eine im voraus berechnete Tafel, die zusammen gehörigen Complexionen, für jeden bestimmten Werth von n, sogleich darstellt. Gleichwohl ist eine solche Tafel gar keine nothwendige Bedingung der combinatorischen Entwickelung oder Zusammensetzung der Gröfsen, auf die sie sich bezieht; wie das Exempel (Ebend. S. 231) zeigt, für welches die dort verlangten Glieder, von

ner Tafel unabhängig, mit gröfster Leichtigkeit sich nden lassen.

Gleiche Bewandnis hat es mit der (Ebend. S. 204) i Fächer eingetheilten Tafel der Combinationen zu nbestimmten Summen n, nach gut geordneten Comexionen und Classen; dahin auch die beyden Tafeln . 208, α, β), gehören. Welche anschauliche Darellung gewährt hier nicht diese Vertheilung der röfsen in Fächer! Man fafst das Ganze mit seinen heilen mit einem Ueberblick. Bey solchen Vorzügen irfte es wohl wenig auf sich haben, wenn eine solie Tafel eine nothwendige unentbehrliche orm für die darinn begriffenen Fälle enthielte, so, afs sich solche ohne diese Tafel nicht lösen liefsen. ber nein. Es wird (Ebend. S. 210, 1) ausdrücklich innert „Obschon hier folgende Complexionen und Fächer aus vorhergehenden abgeleitet werden, so tann man gleichwohl einzelne Vertical- Horizontal- nd Diagonal-Reihen und Fächer, ganz independent ron einander, aufser der Ordnung, leicht schaffen. Das giebt insonderheit die Tafel (S. 298, β) klar und deutlich zu erkennen, weil man die Complexionen jeder Classe und Summe unmittelbar darstellen tann."

Dies ist der Gesichtspunct, aus welchem man die ombinationstafeln und die Vertheilung der Gröfsen in icher zu betrachten hat. Beyde sind nützliche aber ntbehrliche Hülfsmittel. Die Darstellung combinarischer Gröfsen hängt von leichten Regeln ab, durch ren Anwendung und Befolgung jene Gröfsen erst in e Tafeln gekommen sind.

Dafs übrigens in der combinatorischen Analysis n der figürlichen Anordnung der Gröfsen

und ihrer Lage gegen einander häufig Gebrauch gemacht wird, um theils besondere theils allgemeine Sätze und Regeln daraus abzuleiten, ist aus unzähligen Beyspielen bekannt. Von einer *Arithmetica figurata*, einer *Analysi situs*, kommen überall nur Bruchstücke vor. Die Combinationslehre und ihre Anwendung auf die Analysis führt ganz ungezwungen darauf. Einige scharfsinnige hieher gehörige Bemerkungen Bürmann's in seinem *Appendice sur les Rapports de Situation* zu seinem obigen *Polynome Combinatoire* (S. 117). Was endlich

3) Den letzten Punct anbetrifft, so bleibt hier die combinatorische Analysis keinesweges hinter dem Derivationscalcul zurück. Auch sie leitet durch ein zusammenhängendes Verfahren die Polynomialgröfsen, eine aus der andern her, und stellt sie ganz reducirt auf; bekanntermafsen mit der Leichtigkeit, dafs man dazu nicht mehr Zeit braucht, als man zum Schreiben nöthig hat.

Die Wahrheit dieser Behauptung erhellet schon aus einer flüchtigen Uebersicht des ersten Anhangs zu dieser Abhandlung, in welchem Classen aus Classen, zu einerley und verschiedenen, steigenden und fallenden, Summenexponenten abgeleitet werden, sämmtlich in arithmographischer Folge. Beyspiele der eben so einfachen lexicographischen Anordnung kommen auch im zweyten Anhange (Taf. IV) vor. Die [redacted] grofse Leichtigkeit der Verfahren hängt lediglich von den rein-combinatorischen Operationen und Involutionen ab, die hier gebraucht werden, und auf blofsem Ansetzen oder Zufügen, Wegnehmen oder Absondern, Aus- oder Umtauschen (eine Substitution ohne alle Reduction) der vorgegebenen Elemente oder [redacted] beruhen.

134. Aus dem ersten Anhange und der Tafel IV
zweyten, ergiebt sich ferner ohne Schwierigkeit,
ſs die combinatorischen Darstellungen der Classen
s Classen wahre Derivationen sind, die sich
f einen gewissen Anfang (*Origine*) beziehen. So
gen z. B. (Erst. Anh, 7) aus dem Anfange $\eta = {}^6A$,
übrigen Classen zu derselben Summe ${}^6B$, ${}^6C$, ${}^6D$,
${}^6F$, eine nach der andern, durch ein zusammen-
ngendes Verfahren, und (Ebend. 10, 11) aus dem
ıfange $\varkappa = {}^9A$ die folgenden Classen mit steigenden
mmen ${}^{10}B$, ${}^{11}C$; imgleichen aus dem Anfange
$= {}^7A$, die Classen ${}^8B$, ${}^9C$, ${}^{10}D$. . . Man vergleiche
weyt. Anh. Taf. II. no. I und II) die dortigen Bey-
iele, sämmtlich in arithmographischer Folge.
ıendaselbst (no. IV) werden aus der Ordnung β^{n-1}
e übrigen β^{n-2}, β^{n-3}, β^{n-4}, u. s. w. nach einem
meinschaftlichen Gesetze lexikographisch ge-
gert. Die dortige No. V ist ein besonderer Fall,
$n' = 7$.

135. Ich habe bereits oben (6) erinnert, daſs,
nn man meine Derivationen von den Arbogastischen
rch einen besondern Namen unterscheiden will, man
meinigen combinatorische, die Arbogastischen
alytische nennen könnte. Daſs gleichwohl die
nbinatorischen Derivationen auch analytisch sind,
(133, 1) schon bemerkt worden. Sie haben aber
ch noch andere Ansprüche auf diese Benennung, in
fern sie involutorisch sind, und mit den Clas-
zu irgend einer Summe (z. B. zur Summe 10) auch
gleich die Classen aller nächst niedrigern Summen
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 deutlich mit vorgelegt
rden, und letztere aus den erstern sich sogleich
olviren und deriviren lassen. Eben so verhält es
h mit den successiven Werthen der Gröſsen (z. B.
y continuirlichen Brüchen) wo die frühern in die

spätern sich involviren, und wiederum aus den letztern die erstern sich evolviren lassen, mit einer solchen Klarheit und Leichtigkeit, die nur auf involutorischen Wegen möglich ist. Eine solche Übersicht der Gröſsen aus ihren Bestandtheilen verdient ohne Zweifel analytisch genannt zu werden. Wenn endlich, wie Prof. KLÜGEL nur noch neuerlich bemerkt hat (Smml I. S. 49) die Analysis überhaupt die Formen der Gröſsen, nach ihrer Entwickelung und Umwandlung zum eigentlichen Gegenstande hat: so gehören gewiſs die combinatorischen Operationen und Involutionen vornehmlich dahin, die sich ausschlieſslich mit Auffindung der Gestalten und Formen, so wie mit ihrer Umwandlung (der arithmographischen in die lexicographische, der Moivrischen Form in die Boscovichsche) beschäftigt; u. s. w.

ERSTER ANHANG

COMBINATORISCHE ENTWICKELUNG UND DARSTELLUNG DER COMPLEXIONEN FÜR EINZELNE COMBINATIONSCLASSEN UND MEHRERE ZUSAMMEN.

Ich habe zwar in der vorhergehenden Abhandlung als bekannt vorausgesetzt, wie die Gröfsen ${}^{n}A, {}^{n}B, {}^{n}C, {}^{n}D, \ldots$ oder ${}^{n}A, {}^{n+1}B, {}^{n+2}C, {}^{n+3}D, \ldots$ und andere dergleichen für gegebene Summenexponenten und Zeiger, combinatorisch sich entwickeln und darstellen lassen; eine Voraussetzung, zu welcher ich um so mehr berechtigt war, weil darüber bereits in meinen und Anderer a) Schriften häufige und ausführliche Anweisungen ertheilt worden sind. Indessen dürfte es doch, gewisser Leser wegen, die hier vielleicht eine nähere Belehrung wünschen und erwarten, vornehmlich aber zu unmittelbarer Vergleichung des oben berührten Arbogastischen derivativen Verfahrens [no. 23 — 49] mit meinem combinatorischen, insbesondere aber der derivativen, hier (70, 71, 73, 76, 78) aufgestellten Regeln mit den meinigen, nützlich seyn, im Buche selbst etwas davon

a) Töppers, Rothens, Prasens, Pfaffs, Klügels, und neuerlich auch Stahls (Grundrifs der Combinationslehre) und Weingärtners (Lehrbuch der combinatorischen Analysis); worinn von combinatorischen Operationen und Involutionen ausführlich gehandelt worden ist.

na hgewiesen zu finden. Das kann auch um so eher geschehen, weil aus der grofsen Menge combinatorischer Entwickelungen und Darstellungen, hier nur ein sehr kleiner, aber wichtiger, Theil, zu Erfüllung jener Absicht schon hinreicht. Um den Faden der vorstehenden Abhandlung nicht zu unterbrechen, habe ich das dahin gehörige in diesen Anhang kurz zusammen gefafst. Zu besserer Übersicht mag Folgendes dienen.

1. Es seyen P, Q zwey nächste Combinationsclassen mit Wiederholungen; $n, n+1$ zwey nächste Summenexponenten dieser Classen, so geben für

$$\begin{matrix} {}^{n}P, & {}^{n+1}P \\ {}^{n}Q, & {}^{n+1}Q \end{matrix}$$

die horizontalen, verticalen und diagonalen Verbindungen zu zwey und zwey (vor- und rückwärts) dieser vier Classen, folgende Verschiedenheiten:

A. **Einerley Classen zu verschiedenen Summen.**

Aufg. Aus einer gegebenen Classe und Summe,

I. Dieselbe Classe zur nächsthöhern Summe

II. Dieselbe Classe zur nächstniedrigern Summe

herzuleiten. I II

$${}^{n}P \qquad {}^{n+1}P \qquad {}^{n}P$$

B. **Verschiedene Classen zu einerley Summe.**

Aufg. Aus einer gegebenen Classe und Summe;

III. Die nächsthöhere Classe zu derselben Summe

IV. Die nächstniedrigere Classe zu derselben Summe

herzuleiten. III IV

$${}^{n}P \qquad {}^{n}Q \qquad {}^{n}P$$

C. Verschiedene Classen zu verschiedenen Summen.

Aufg. Aus einer gegebenen Classe und Summe

Die nächsthöhere Classe zur nächsthöhern Summe

I. Die nächstniedrigere Classe zur nächstniedrigern Summe

$$\overbrace{{}^{n}P \quad {}^{n+1}Q}^{V} \quad \overbrace{\quad {}^{n}P}^{VI}$$

II. Die nächsthöhere Classe zur nächstniedrigern Summe

III. Die nächstniedrigere Classe zur nächsthöhern Summe herzuleiten.

$$\overbrace{{}^{n+1}P \quad {}^{n}Q}^{VII} \quad \overbrace{\quad {}^{n+1}P}^{VIII}$$

Von den noch übrigen Combinationen ist: Q, ${}^{n+1}Q$, ${}^{n}Q$ mit I, II; und ${}^{n+1}P$, ${}^{n+1}Q$, ${}^{n+1}P$ mit II, IV gleichgültig. Diese gehören also nicht weiter hieher.

Diese Aufgaben, für bestimmte Classen und Summen, werden in der Folge, nach der Ordnung der hier beygefügten Zahlen I, II ... VIII, aufgeführt werden. Zuförderst noch Folgendes, als nöthige Vorerinnerung:

2. Zu promter Anordnung und Darstellung der Complexionen jeder verlangten Combinationsclasse mit ihren Ordnungen, ist es wichtig, das Wenige, was hier folgt, immer in Gedanken und vor Augen zu haben.

a) Die Buchstaben α, β, γ, δ ... als Coefficienten der Reihe, werden auf Zahlenwerthe bezogen, wie sie der Zeiger $\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}\varepsilon, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots\end{pmatrix}$ u. s. w. nachweiset.

b) Die Glieder oder Complexionen der Classen A, ${}^{n}B$, ${}^{n}C$, ... gehören sämtlich zu einer und derselben Summe, n; das heifst, in jeder einzelnen Complexion dieser Classen müssen die Zahlenwerthe der Elemente, nach dem Zeiger diese Summe ausmachen.

c) Die Classen z. B. ^{9}D, ^{10}D bestehen aus so vielen Complexionen, so viel sich aus dem Zeiger Quaternionen (von Zahlen oder Buchstaben) mit Wiederholungen, gut geordnet (in alphabetischer oder numerischer Folge) zusammen setzen lassen, und die Summe 9 oder 10 ausmachen. Eben so für andere Classen und Summen.

d) Diese Complexionen müssen, nicht blos in Absicht auf die Elemente jeder einzelnen (*c*) sondern auch unter einander gut geordnet seyn, d. i. als Zahlen gelesen, wie wachsende Zahlen fortgehen, und auf einander folgen. Das nennt man gut geordnete Complexionen und Classen.

e) Die Complexionen der Classen lassen sich endlich combinatorisch

1) von andern vorhergehenden oder folgenden (frühern oder spätern) Classen und Summen abhängig herleiten; oder

2) von dergleichen Classen oder Summen unabhängig construiren; indem man dabey von einem gewissen Anfange (*Origine*) ausgeht, von welchem alle übrigen Complexionen, die man für eine oder mehrere Classen sucht, nach und nach abfliefsen.

Die combinatorischen, auf diese Sätze gegründeten Vorschriften für die Auflösung der folgenden Aufgaben sind äusserst leicht, und eben so leicht ist die Einsicht in ihre Gründe.

inerley Classen zu verschiedenen Summen (1, A)

3. Aufgabe. ${}^{n}D$, ${}^{n+1}D$ wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \vartheta \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \end{pmatrix}$$

ür $n = 9$, ist

I		II
${}^{9}D$	${}^{10}D$	${}^{9}D$
=	=	=
$\beta\beta\beta\eta$	$\beta\beta\beta\vartheta$	$\beta\beta\beta\eta$
$\beta\beta\gamma\zeta$	$\beta\beta\gamma\eta$	$\beta\beta\gamma\zeta$
$\beta\beta\delta\varepsilon$ - -	$\beta\beta\delta\zeta$	$\beta\beta\delta\varepsilon$
	$\beta\beta\varepsilon\varepsilon$ - -	- - - -
$\beta\gamma\gamma\varepsilon$	$\beta\gamma\gamma\zeta$	$\beta\gamma\gamma\varepsilon$
$\beta\gamma\delta\delta$ - -	$\beta\gamma\delta\varepsilon$	$\beta\gamma\delta\delta$
	$\beta\delta\delta\delta$ - -	- - - -
$\gamma\gamma\gamma\delta$ - -	$\gamma\gamma\gamma\varepsilon$	$\gamma\gamma\gamma\delta$
	$\gamma\gamma\delta\delta$ - -	- - - -

I Aus ${}^{9}D$ zu deriviren ${}^{10}D$

1) Den letzten Buchstaben jeder Complexion (in D) vertausche man mit dem nächstfolgenden des Alphabets oder Zeigers.

(Aus $\beta\beta\beta\eta$ folgt $\beta\beta\beta\vartheta$; aus $\beta\beta\gamma\zeta$ folgt $\beta\beta\gamma\eta$ u. s. w.)

2) In denjenigen Complexionen, in welchen dem tzten Buchstaben, oder einer Dignität desselben, der ächstvorhergehende Buchstabe des Alphabets oder eine otenz von ihm vorangeht, vertausche man diesen uchstaben oder einen Factor seiner Potenz, mit dem ächstfolgenden des Alphabets, und schreibe die so gelgerte Complexion sogleich nach der, die (1) geeben hat.

(Aus $\beta\beta\delta\varepsilon$ folgt $\beta\beta\delta\zeta$ (nach 1) und $\beta\beta\varepsilon\varepsilon$ (nach 2); aus $\beta\gamma\delta\delta$ folgt $\beta\gamma\delta\varepsilon$ (nach 1) und $\beta\delta\delta\delta$ (nach 2); aus $\gamma\gamma\gamma\delta$ folgt $\gamma\gamma\gamma\varepsilon$ (nach 1) und $\gamma\gamma\delta\delta$ (nach 2).

Hier waren nehmlich alle gut geordnete Complexionen (Quaternionen) zur verlangten Summe (hier 10), aus den gegebenen zur nächst niedrigern Summe, abzuleiten und in eine gut geordnete Classe zusammen zu stellen (2, *b*, *c*, *d*). So läfst sich die Richtigkeit der Auflösung (1, 2) geschwind übersehen und rechtfertigen.

Von einer Modification der Regel, und dadurch etwas veränderten Auflösung von I, sehe man (in 8).

Diese combinatorische Auflösung ist mit der derivativen (71) bis auf die numerischen Coefficienten, vollkommen übereinstimmend. Man vergleiche (72).

II, Aus ^{10}D zu deriviren ^{9}D

1) In jeder Complexion (in ^{10}D) worinn die beyden letzten Buchstaben verschieden sind, vertausche man den lezten Buchstaben mit dem nächstvorhergehenden des Zeigers oder Alphabets.

(Aus $\beta\beta\beta\vartheta$ folgt $\beta\beta\beta\eta$; aus $\beta\beta\gamma\eta$ folgt $\beta\beta\gamma\zeta$; u. s. w.)

2) Die übrigen Complexionen, die zwey oder mehrere gleiche Endbuchstaben enthalten, übergehe man.

(Dergleichen sind hier $\beta\beta\varepsilon\varepsilon$, $\beta\delta\delta\delta$, $\gamma\gamma\delta\delta$; diese würden nämlich (nach 1) lauter schlechtgeordnete Complexionen geben).

Auch diese Regel liefse sich, wie die für I, nach (8) modificiren, und die Auflösung für II etwas dadurch abändern.

Arbogast's damit übereinstimmende derivative Regel, in (73)

4. Über das sehr nützliche Verfahren, allgemeine Vorschriften an besondern Beyspielen, wie hier (3. I, II), nachzuweisen, und was man dabey zu beobachten habe; Moivre's Bemerkung (*Infin. Dign.* p. 78. Note)

AC. BERNOULLI (*Ars coni. p.* 21) sagt von einer combinatorischen Anordnung, was von allen gilt: *Haec omnia melius exemplis, quam regulis addiſci possunt*; nach MOIVRE hat man noch mehr; Regel und Beyspiel beysammen vereinigt. Begreiflich muſs das Exempel, als besonderer Fall, so gewählt seyn, daſs sich die einzelnen Theile der Regel deutlich darauf anpassen lassen. Ich werde daher auch in der Folge immer solche Beyspiele aufstellen.

Man übersieht leicht, daſs die Anordnung der Complexionen und ihre Folge jede andere seyn könnte, als hier (in 2) gefordert wird, wenn man sie nur alle hat. Aber die Bedingung von gut geordneten Complexionen und Classen (*a*, *c*, *d*) ist ein sehr sicheres und äusserst bequemes Mittel, keine Complexion zu verfehlen, keine doppelt zu erhalten. Ein anderes, nicht so bequemes Verfahren, die ${}^{m}M$, ${}^{m+1}M$, ${}^{m+2}M$ ... durch einander abzuleiten, und auf ${}^{5}E$, ${}^{6}E$, ... ${}^{10}E$ angewendet (PFAFF *Disquis. anal. p.* 29). Dort sind zwar die Complexionen, nicht aber die Classen, gut geordnet.

Wie man die Complexionen aller Classen zur Summe n, aus denen zur Summe $n-1$ deriviren könne; von WEINGAERTNER bequem angeordnet (Lehrb. der combin. Anal. I. 29. S. 130, 131). Das Verfahren läſst sich leicht umkehren, um von n auf $n-1$ zu deriviren.

Verschiedene Classen zu einerley Summe (1,

5. Aufgabe. ${}^{n}C$, ${}^{n}D$ wechselseitig von einan abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \ldots & \iota & \varkappa & \lambda \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 8 & 9 & 10 \ldots \end{pmatrix}$$

Für $n = 12$, ist

III		IV
${}^{12}C$	${}^{12}D$	${}^{12}C$
$\beta\beta\lambda$	$\beta\beta\beta\varkappa$	$\beta\beta\lambda$
$\beta\gamma\varkappa$	$\beta\beta\gamma\iota$	$\beta\gamma\varkappa$
$\beta\delta\iota$	$\beta\beta\delta\vartheta$	$\beta\delta\iota$
$\beta\varepsilon\vartheta$	$\beta\beta\varepsilon\eta$	$\beta\varepsilon\vartheta$
$\beta\zeta\eta$	$\beta\beta\zeta\zeta$	$\beta\zeta\eta$
$\gamma\gamma\iota$	$\beta\gamma\gamma\vartheta$	$\gamma\gamma\iota$
$\gamma\delta\vartheta$	$\beta\gamma\delta\eta$	$\gamma\delta\vartheta$
$\gamma\varepsilon\eta$	$\beta\gamma\varepsilon\zeta$	$\gamma\varepsilon\eta$
$\gamma\zeta\zeta$	----	$\gamma\zeta\zeta$
$\delta\delta\eta$	$\beta\delta\delta\zeta$	$\delta\delta\eta$
$\delta\varepsilon\zeta$	$\beta\delta\varepsilon\varepsilon$	$\delta\varepsilon\zeta$
$\varepsilon\varepsilon\varepsilon$	----	$\varepsilon\varepsilon\varepsilon$
	$\gamma\gamma\gamma\eta$	
	$\gamma\gamma\delta\zeta$	
	$\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon$	
	$\gamma\delta\delta\varepsilon$	
	$\delta\delta\delta\delta$	

III. Aus ${}^{12}C$ zu deriviren ${}^{12}D$

1) Jeder Complexion der gegebenen Classe (^{12} mit Übergehung derer, die am Ende zwey oder m gleiche Elemente haben, setze man β vor, v vertausche den letzten Buchstaben der Complexion i dem nächstvorhergehenden des Zeigers. Dies giebt

mit β anfangenden Complexionen (die Ordnung β) der zu derivirenden Classe (^{12}D).

(Die Puncte neben $\gamma\gamma\zeta$ und $\ldots\varepsilon\varepsilon$ in ^{12}C weisen nach, dass diese Glieder keine Complexionen in ^{12}D geben.)

2) In den so gefundenen Complexionen der Ordnung β (mit Übergehung derjenigen Complexionen, welche entweder zwey oder mehr gleiche Anfangs- oder zwey oder mehr gleiche Endelemente, eins oder beydes zusammen, haben) vertausche man den ersten Buchstaben jeder Complexion mit dem nächstfolgenden, den letzten hingegen mit dem nächstvorhergehenden, des Zeigers (nicht der Complexion). So erhält man die mit γ anfangenden Complexionen (die Ordnung γ) derselben Classe (^{12}D)

(Aus $\beta\gamma\gamma\vartheta$ folgt $\gamma\gamma\gamma\eta$; aus $\beta\gamma\delta\eta$ folgt $\gamma\gamma\delta\zeta$;
aus $\beta\gamma\varepsilon\zeta$ folgt $\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon$; aus $\beta\delta\delta\zeta$ folgt $\gamma\delta\delta\varepsilon$;
Nur daraus lassen sich gut geordnete Complexionen folgern.)

3) Eben so derivirt man die Ordnung δ aus der Ordnung γ, wenn man die Vorschrift (2) auf die Ordnung γ, wie vorher auf β, anwendet, und eben so die zugehörigen Anfangs- und Endbuchstaben der umzuwandelnden Complexionen vertauscht. Und so für die übrigen Ordnungen, so viel deren die zu derivirende Classe enthält, bis man (2) nicht weiter anwenden kann.

(Aus $\gamma\delta\delta\varepsilon$ folgt $\delta\delta\delta\delta$, die einzige Complexion der Ordnung δ und zugleich die letzte der Classe ^{12}D)

Anmerkung. Wenn man den Complexionen in ^{12}C, β vorsetzt (III, 1), und nachher (III, 2) β mit γ, und III, 3) γ mit δ, u.s.w vertauscht, ohne weiter etwas zu ändern, so erhält man dadurch lauter zu ^{13}D nicht zu ^{12}D) gehörige Complexionen; wo also jene erst auf diese, durch (3, II) oder [no. 36], zu reduciren wären. Durch das, was ich hier (in 1, 2) von Vertauschung des letzten Buchstabens jener Complexionen mit dem nächst vorhergehenden, gesagt habe, wird eine Nachweisung entbehrlich gemacht. Es ist bequem

in der Auflösung alles, was zu vollkommner Darstellung der Complexionen gehört, beysammen zu haben, wenn sich das so in der Kürze, wie hier und zunächst in (IV), abthun läfst; es ist aber auch nützlich, die Beziehung der Aufgaben und ihre Dependenzen von einander zu kennen. Und so begreift man ohne Schwierigkeit: 1) woher in dem Arbogastischen Vortrage der Regel (78, II, III, IV) die Berufung auf [no. 36] herrührt, die bey mir nicht vorkommt 2) wie und warum die dortigen (I, II) hier (in 1) sich haben zusammen ziehen lassen 3) dafs jene derivative Regel (78) mit meiner (Sml. I. S. 183. 184 zuerst vorgetragenen) hiesigen combinatorischen Vorschrift, ganz vollkommen übereinstimme und identisch sey; das abgerechnet, versteht sich, was in jener Regel die Bestimmung der numerischen Coefficienten anbetrift, die ich mit gutem Vorbedacht besonders betrachte.

IV. Aus ^{12}D zu deriviren ^{12}C

1) Von allen Complexionen der (ersten) Ordnung β der gegebenen Classe (^{12}D) schneide man das vorderste β durch einen Senkstrich, oder auf andere Art, ab, und vertausche den letzten Buchstaben der so gekürzten Complexionen mit dem nächstfolgenden des Zeigers.

(Aus $\beta\beta\beta\varkappa$ folgt $\beta\beta\lambda$; aus $\beta\beta\zeta\zeta$ folgt $\beta\zeta\eta$; u. s. w.)

2) In denjenigen Complexionen, in welchen der letzte Buchstabe (einzeln oder wiederholt) den nächstvorhergehenden des Zeigers (einzeln oder wiederholt) zum Vorgänger hat, wird auch dieser vorletzte Buchstabe in den nächstfolgenden des Zeigers verwandelt und die so veränderte Complexion gleich nach der gesetzt, die (1) gegeben hat.

(Aus $\beta\gamma\varepsilon\zeta$ folgt $\gamma\varepsilon\eta$ (aus 1) und $\gamma\zeta\zeta$ (aus 2)
aus $\beta\delta\varepsilon\varepsilon$ folgt $\delta\varepsilon\zeta$ (aus 1) und $\varepsilon\varepsilon\varepsilon$ (aus 2)
wie auch die Puncte in beyden Fällen nachweisen.)

Anmerkung. Das Abschneiden der β in (1) giebt
ıter zu ^{11}C (nicht zu ^{12}D) gehörige Complexionen,
ıher eben die Vertauschung der lezten (1) zuweilen
ch der vorlezten (2) Buchstaben der so gekürzten
ımplexionen mit dem nächstfolgenden, in der Regel
bst bemerkt; wogegen ARBOGAST (76) den Satz
o. 3] hier (71) citirt. Und so ist wieder die de-
vative Regel (76) mit der hier gegebenen com-
natorischen Vorschrift vollkommen übereinstim-
ınd und identisch.

76. Da auf der Deduction der Ordnungen aus einan-
r bey der rein-combinatorischen Darstellung
viel, ja fast alles, beruht, so will ich noch folgende

Ordnungen von ^{15}C

$\beta\beta\xi$				
$\beta\gamma\nu$	$\gamma\gamma\mu$			
$\beta\delta\mu$	$\gamma\delta\lambda$	$\delta\delta\varkappa$		
$\beta\varepsilon\lambda$	$\gamma\varepsilon\varkappa$	$\delta\varepsilon\iota$	$\varepsilon\varepsilon\vartheta$	
$\beta\zeta\varkappa$	$\gamma\zeta\iota$	$\delta\zeta\vartheta$	$\varepsilon\zeta\eta$	$\zeta\zeta\zeta$
$\beta\eta\iota$	$\gamma\eta\vartheta$	$\delta\eta\eta$		
$\beta\vartheta\vartheta$				

ie sie aus einander sich deriviren lassen, neben ein-
ıder stellen und als Beyspiel hier vorlegen. In
, III, 1) würde die Ordnung β (für ^{11}D) erst ge-
cht, und daraus die übrigen (Ebend. 2, 3) abgelei-
. Wäre, wie zuweilen geschieht und man auch
r (in ^{15}C) annehmen kann, die Ordnung β, oder
le andere, gegeben, so könnte man die übrigen
ich nach (2, 3) bestimmen. Die Complexionen in
n verticalen Colonnen liegen hier, zur unmittelbaren
rgleichung, so neben einander, wie eine aus der
dern in horizontaler Richtung sich folgern läfst.

7. Von den Classen

^{n}A, ^{n}B, ^{n}C, ^{n}D, $^{n}E \ldots {}^{n}N$

(für obigen Zeiger)

sind die beyden äufsersten, für jeden Werth von n, gegeben. Für $n=6$ wäre ${}^6A=\eta$ und ${}^6F=\beta\beta\beta\beta\beta\beta$ $=\beta^6$; und so könnte man η oder β^6 als Anfang der combinatorischen Deductionen (*Origine des Dérivations*) und als erste Classe annehmen, und daraus die zweyte, und daraus weiter die dritte, und so ferner die übrigen Classen mit ihren Ordnungen, zu derselben Summe, von allen Classen vorhergehender oder folgender Summen unabhängig, deriviren.

Folgende beyden Schemata bedürfen keiner weitern Erläuterung.

${}^6A$	η	${}^6F$	$\beta\beta\beta\beta\beta\beta$
	$\beta\zeta$	${}^6E$	$\beta\beta\beta\beta\gamma$
${}^6B$	$\gamma\varepsilon$		$\beta\beta\beta\delta$
	$\delta\delta$	${}^6D$	$\beta\beta\gamma\gamma$
	$\beta\beta\varepsilon$		$\beta\beta\varepsilon$
${}^6C$	$\beta\gamma\delta$	${}^6C$	$\beta\gamma\delta$
	$\gamma\gamma\gamma$		$\gamma\gamma\gamma$
${}^6D$	$\beta\beta\beta\delta$		$\beta\zeta$
	$\beta\beta\gamma\gamma$	${}^6B$	$\gamma\varepsilon$
${}^6E$	$\beta\beta\beta\beta\gamma$		$\delta\delta$
${}^6F$	$\beta\beta\beta\beta\beta\beta$	${}^6A$	η

Hier ist jede Derivation die umgekehrte der andern (directen). Für beyde sind die Anfangsglieder (*Origines*) η und $\beta\beta\beta\beta\beta\beta$ gegeben. Alles wird aus (5, HI) im ersten, aus (5, IV) im zweyten Falle abgeleitet.

Anmerkung. Solche combinatorische Darstellungen der Complexionen nach einander, nennt man independente, weil die Entwickelung ihrer Classen keine Classen zu niedrigern oder höhern Summen voraus-

setzt. Freylich ist an eine absolute Independenz hier nicht zu gedenken. Die Dependenz ruht hier auf den Ordnungen der Classen, und man sieht hier, und weifs schon sonst aus Erfahrung, dafs das, was man dafür zu merken und zu thun hat, an Leichtigkeit alles übertrifft, was man sich Leichtes denken mag; und so wird denn eine solche combinatorische Dependenz einer absoluten Independenz beynahe gleichgültig.

8. Da die Ableitung der Ordnungen aus Ordnungen ein so leichtes Geschäft ist, dafs man sich schwerlich dabey versehen kann: so wird es immer vortheilhaft seyn, die combinatorischen Aufgaben ganz oder zum Theil darauf zu reduciren. So z. B. wenn man ^{15}C aus ^{14}C oder ^{16}C deriviren sollte: so würde man immer leichter und geschwinder (wenigstens im ersten Falle) zum Zweck gelangen, wenn man die Regeln dafür (3, I und 3, II) nur auf die Darstellung der Ordnung β anwendete, und von da an die übrigen Ordnungen (von ^{15}C) von einander derivirte, wie in (6), als wenn man jene Regeln bis zu Ende verfolgen wollte. So läuft auch die Auflösung (5. III) auf ein blofses Bestimmen der Ordnung β (Das. 1) und Derivieren der übrigen Ordnungen durch einander (Das. 2, 3) hinaus. Auch die Regel (5, IV) läfst sich darauf bringen, wenn man sie blofs benutzt, die Ordnung β daraus herzustellen, und dann weiter Ordnungen aus Ordnungen ableitet. Das lehrt die Wichtigkeit der Vorschrift (5. III, 2, 3). Eine neue Bestätigung wird Folgendes zeigen.

Verschiedene Classen zu vershiedenen Sum

(1, C)

9. Aufgabe. ^{n}C, ^{n+1}D wechselseitig von ei der abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \dots & \theta & \iota & \varkappa \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Für n = 11, ist V VI

^{11}C	^{12}D		^{11}C
=	=		=
$\beta\beta\varkappa$	β | $\beta\beta\varkappa$		$\beta\beta\varkappa$
$\beta\gamma\iota$	β | $\beta\gamma\iota$		$\beta\gamma\iota$
$\beta\delta\theta$	β | $\beta\delta\theta$		$\beta\delta\theta$
$\beta\varepsilon\eta$	β | $\beta\varepsilon\eta$		$\beta\varepsilon\eta$
$\beta\zeta\zeta$	β | $\beta\zeta\zeta$		$\beta\zeta\zeta$
$\gamma\gamma\theta$	β | $\gamma\gamma\theta$		$\gamma\gamma\theta$
$\gamma\delta\eta$	β | $\gamma\delta\eta$		$\gamma\delta\eta$
$\gamma\varepsilon\zeta$	β | $\gamma\varepsilon\zeta$		$\gamma\varepsilon\zeta$
$\delta\delta\zeta$	β | $\delta\delta\zeta$		$\delta\delta\zeta$
$\delta\varepsilon\varepsilon$	β | $\delta\varepsilon\varepsilon$		$\delta\varepsilon\varepsilon$
	γ $\gamma\gamma\eta$		
	γ $\gamma\delta\zeta$		
	γ $\gamma\varepsilon\varepsilon$		
	γ $\delta\delta\varepsilon$		
	δ $\delta\delta\delta$		

V. Aus ^{11}C zu derivиren ^{12}D

1) Jeder Complexion der gegebenen Classe (setze man β vor, so hat man die Ordnung β der zu rivirenden Classe (^{12}D)

2) Daraus leite man die Ordnung γ, und da die Ordnung δ, u. s. w. ab (5, III, 2, 3) so lange diese Regel anwendeu kann.

Anmerkung. Hier wird wieder eine Ordnung sucht, und aus dieser die folgende, u. s. w. die

gen, abgeleitet; wodurch das ganze Verfahren sehr einfach und leicht wird (8).

VI. Aus ^{12}D zu derivíren ^{11}C

1) Von der Complexion zur Ordnung β der gegebenen Classe (^{12}D) schneide man durch einen Verticalstrich die vordersten β ab.

2) An diesen Verticalstrich, wo er sich, neben dem lezten β endigt, ziehe man unter die übrigen, an diesem β liegenden, Buchstaben einen Horizontalstrich. Die Complexionen, die dieser Winkel faſst, geben zusammen die gesuchte Classe (^{11}C).

Anmerkung 1. Hatte man in (V) wenig, so hat man hier in (VI) fast gar nichts für die Auflösung zu thun. Das ganze Geschäft wird mit zwey Strichen abgethan, die einen Winkel einschlieſsen, und nichts kann leichter seyn, als diesen Winkel zu machen. Ich habe ihn mit Fleis auch bey der obigen dritten Colonne (für ^{11}C) beybehalten, zur deutlichen Nachweisung, daſs ihre Complexionen dieselben sind, die innerhalb des Winkels der zweyten Colonne (für ^{12}D) stehen, und daſs sie aus dieser nur **ausgeschnitten** und **ausgehoben** sind.

Anmerkung 2. Arithmetisch lies sich die Auflösung (VI) so ausdrücken: Alle Glieder der Gröſse (^{12}D) die β enthalten $(\beta^3\varkappa + \beta^2\gamma\iota \ldots + \beta\delta^2\zeta + \beta\delta\varepsilon^2)$ dividire man durch β; der Quotient $(\beta^2\varkappa + \beta\gamma\iota \ldots + \delta^2\zeta + \delta\varepsilon^2)$ giebt die Glieder der gesuchten Gröſse (^{11}C). Jene anschauliche combinatorische Darstellung mit ihren Folgen, ist gleichwohl diesem, zwar kurzen, aber trocknen arithmetischen Ausdrucke (dergleichen bey ARBOGAST mehrere hin und wieder vorkommen) weit überlegen.

Verschiedene Classen zu vershieden

(I, C)

9. Aufgabe. $^{n}C, ^{n+1}D$ wechsel der abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \dots & \theta \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 7 \end{pmatrix}$$

Für n = 11, ist V

^{11}C	^{12}D
=	=
$\beta\beta\varkappa$	$\beta \mid \beta\beta\varkappa$
$\beta\gamma\iota$	$\beta \mid \beta\gamma$
$\beta\delta\theta$	$\beta \mid \beta\delta$
$\beta\varepsilon\eta$	$\beta \mid \beta$
$\beta\zeta\zeta$	$\beta \mid \beta$
$\gamma\gamma\theta$	$\beta \mid$
$\gamma\delta\eta$	$\beta \mid$
$\gamma\varepsilon\zeta$	β
$\delta\delta\zeta$	ι
$\delta\varepsilon\varepsilon$	

sem We
langte Cl
enen Summ
volutorisch an
darstellen. Den
us ^{11}E sich ^{10}D, ^{9}C,
A evolviren lassen,
man nur $^{7}A = \theta$ als A

V. glied (*Origine des I*

1) Jeder C ^{10}D *tions*) setzen, und dar
setze man β vo δ Ordnungen von ^{8}B, u
rivirenden Cla von ^{9}C, und daraus die von ^{10}D

2) Dara die von ^{11}E, sämmtliche Ordnung
die Ordnung en) gerechnet, ableiten; indem m
diese Regel sie sey nun entweder gegeben, v
An gefunden, wie die üb
sucht, [redacted] ohne weiter etwas a
plexionen dieser Ordnu

nungen (nach 5, III,

r. S. 187,
ie sich
chneiden
nur müfs-

esetzt werden.
biger Darstellung

, die Winkel jedesmal
Nachtheil vollkommen
ie in die Augen fällt, zu
ich eine Classe aus der an-
n dieser Rücksicht nützlich.
es Mittel einer sogenannten
binatorisch-dependenten, und
) Darstellung (7, Anm.) an die
noch Vorzüge hat. Dort mufste
3 der geforderten Classe zu machen,
e Classe zu derselben Summe vor Au-
d das hat keine Schwierigkeit, wenn
n ^{n}A, ^{n}B, ^{n}C ... nach der Ordnung
t aber wenn man eine aufser der Ord-
cht. Freylich mufs man, z. B. hier für ^{11}E,
n ^{7}A, ^{8}B, ^{9}C, ^{10}D nach und nach produciren,
, auf den ersten Anblick, weitläuftig zu seyn
. Aber, wie durch ein Wunderwerk für den,
erste Erfahrung dieser Art macht, wirkt hier
olution dahin, dafs man zwar alle diese Classen,
e sie einander bestimmen, auf einmal dargestellt
gen hat, dennoch aber für sie nichts weiter hat
en dürfen, als man für die Classe ^{11}E nothwen-
schreiben müssen. Nichts darf hier verrückt,
geändert werden; alles ist vollkommen reducirt,

alles auf die einfachste Art, das heifst, involutorisch-combinatorisch angeordnet.

So etwas ist durch arithmetische Operationen und Hülfsmittel nicht zu erreichen, ist auch den gewöhnlichen bekannten analytischen Vorträgen ganz fremd. Dafs aber auch solche Darstellungen analytisch genannt werden können und mit welchem Rechte ich selbige, als analytische Hülfsmittel unter die übrigen, aufgestellt habe, läfst sich schon aus dem Wenigen hier angeführten übersehen. Ausführlicher davon (133, 135). Hier geht man durchgängig bis auf die Elemente, auf ihre Anordnung und Verbindung mit einander, zurück, und benützt die Vortheile, die sich durch die Stellung derselben ergeben. Auch hier, wie in den schönen Künsten, ist Darstellung die Hauptsache, der letzte und höchste Zweck. Wer ein blofs mechanisches Verfahren [b]) darinn zu finden glaubte, der würde die ganz einfachen Gründe übersehen, auf welche die aufgeführten Regeln und Vorschriften sich stützen, und dafs nur deswegen die involutorisch-combinatorischen Darstellungen so analytisch lehrreich sind, und die gesuchte Gröfse mit allen ihren Theilen, und deren Dependenzen von einander, wie man will, gehörig verbunden und zugleich getrennt, mit einem Blick übersehen lassen.

13. Arbogast, den sein derivatives Substitutionsverfahren auf die combinatorischen Regeln (I—IV) lei-

b) Die gewöhnlichen involutorisch-combinatorischen Darstellungen sind eben so wenig blos mechanische Verfahren, als es die ihnen ganz gleichgültigen Derivationen sind. Dafs bey jenen oft Winkel gebraucht werden, qualificirt sie eben so wenig dazu; denn diese Winkel sind nicht nothwendig und man kann sie ganz entbehren (11). Solche figürliche Anordnungen hingegen (wie Sml. I. S. 204, 208), wo die Complexionen in besondere Fächer zusammengeordnet werden, kann man eher, wenn man will, mechanisch nennen. Davon ausführlicher (S. 289—291).

e, in die es sich endlich auflöſst, hat von den Re-
n (V, VI) nichts bemerkt, die sich aus jenem Ver-
ren auch ableiten lassen. Eine Darstellung wie die
B. ^{11}E (in 11) ist recht dazu geeignet, jede Classe
eine Summe niedrigerer Classen unmittelbar auszu-
icken; und so wäre denn, im obigen Falle,

$$^{11}E$$

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \ldots & \eta & \theta \\ 1 & 2 & \ldots & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \beta^4\,{}^7A + \beta^3\,{}^8B + \beta^2\,{}^9C + \beta^1\,{}^{10}D + \beta^0\,{}^{11}E$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \beta^4\,{}^6A + \beta^3\,{}^6B + \beta^2\,{}^6C + \beta^1\,{}^6D + \beta^0\,{}^6E$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \delta & \ldots & \eta & \theta \\ 1 & 2 & \ldots & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

in vergleiche (Sml. I. S. 189, 190, 191, 192, 237).

Hier sind: 1) Die Werthe der ^7A, ^8B, ^9C, ^{10}D,
(in 13 und 11), wegen der verschiedenen Zeiger
$\begin{pmatrix} \gamma, & \delta & \ldots \\ 2, & 3 & \ldots \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \beta, & \gamma & \ldots \\ 1, & 2 & \ldots \end{pmatrix}$, nicht einerley,
ndern verschieden. Man vergleiche (Sml. I. S. 189,
o). 2) Der leztere Ausdruck durch ^6A, ^6B, ^6C, ^6D,
(dieselben Classen, wie vorher, aber zu der nie-
igern, durchaus gleichen, Summe 6, und dem einfa-
ern Zeiger von 1 an) ist der bequemere und gewöhn-
h benuzte. 3) Dieser bequemere Ausdruck stimmt
ch zu der combinatorischen allgemeinen Zerlegungs-
rmel (61, vergl. 66), durch welche mit den Literal-
oducten für die Classen zugleich die numerischen
efficienten gegeben werden.

14. Wenn eine Classe ^nM auf den Zeiger
$\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta \ldots \\ 1, & 2, & 3 \ldots \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \delta, & \varepsilon, & \zeta \ldots \\ 3, & 4, & 5 \ldots \end{pmatrix}$
s. w. bezogen wird, so verlangt man ihre Comple-

sionen, von der Ordnung 1 oder β an, also die ganze Classe; oder von der Ordnung 2 oder γ, oder von der Ordnung 3 oder δ an, u. s. w.; also nur einen Theil dieser Classe. Diesen Theil der Classe giebt die Involution (11) eben so leicht als die ganze Classe.

γ	γ	γ	η	^{6}A
γ	γ	δ	ζ	
γ	γ	ε	ε	^{8}B
γ	δ	δ	ε	^{10}C
δ	δ	δ	δ	

So wäre für ^{12}D

$$\begin{pmatrix} \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

die erste Complexion der Ordnung 2 oder γ, hier $\gamma\,\gamma\,\gamma\,\eta$, gegeben; und daraus, oder vielmehr aus $\eta = {}^6$A, als *Origine*, werden die übrigen durch Involution hergeleitet. Was also in (9, V) für die Ordnung γ in ^{12}D mittelbar (durch Ableitung von der ersten, β) geschieht, das geschieht hier unmittelbar (von der ersten Ordnung unabhängig) durch das gegebene Anfangsglied η.

So viel von der so merkwürdigen Classendarstellung und Classenbeziehung in (V, VI).

Verschiedene Classen zu vershiedenen Summen (1, C)

15. Aufgabe. $^{n+1}$D, ^{n}E wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \ldots & \theta & \iota & \varkappa \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Für $n = 11$, ist

VII		VIII	
^{12}D	^{11}E		^{12}D
$=$	$=$		$=$
$\beta\beta\beta\varkappa$	$\beta\beta\beta\beta\theta$		$\beta\beta\beta\varkappa$
$\beta\beta\gamma\iota$	$\beta\beta\beta\gamma\eta$		$\beta\beta\gamma\iota$
$\beta\beta\delta\theta$	$\beta\beta\beta\delta\zeta$		$\beta\beta\delta\theta$
$\beta\beta\varepsilon\eta$	$\beta\beta\beta\varepsilon\varepsilon$		$\beta\beta\varepsilon\eta$
$\beta\beta\zeta\zeta$	$\beta\beta\gamma\gamma\zeta$		$\beta\beta\zeta\zeta$
. . . .	. . . . .		. . . .
(wie in 9)	(wie in 11)		(wie in 9)

VII. Aus ^{12}D zu deriviren ^{11}E

Aus ^{12}D derivire man

$$\left\{\begin{matrix}{}^{11}D\ (3,\ II)\\ {}^{12}E\ (5,\ III)\end{matrix}\right\} \text{ und daraus } {}^{11}E \left\{\begin{matrix}5,\ III\\ 3,\ II\end{matrix}\right\}$$

VIII. Aus ^{11}E zu deriviren ^{12}D

Aus ^{11}E derivire man

$$\left\{\begin{matrix}{}^{12}E\ (3,\ I)\\ {}^{11}D\ (5,\ IV)\end{matrix}\right\} \text{ und daraus } {}^{12}D \left\{\begin{matrix}5,\ IV\\ 3,\ I\end{matrix}\right\}$$

16. Hier mufs man immer zwey Derivationen machen, wodurch die Auflösung etwas weitläuftiger wird, als die vorigen (I — VI). Wollte man beyde Derivationen in eine Regel zusammenfassen (wie für III, IV geschehen, und in der Anmerkung zu (5, III) ist erinnert worden), so würde die Regel dafür zu verwikkelt werden. Beyde Fälle kommen in der Anwendung selten oder gar nicht vor. Ich will mich also nicht länger dabey aufhalten. Sie sind blos der Verbindung wegen, in welcher sie mit den vorhergehenden stehen (1), hier aufgeführt worden.

---

17. Es wird (*Calc. des Der. Préf. p.* V) als ein Vorzug der derivativen Regeln für die Entwickelung der Polynomialgröfsen gerühmt, dafs sie mit den Literalproducten auch zugleich die zugehörigen Zahlencoefficienten geben. Da aber dadurch 1) das combinatorische Gesetz für jene Buchstabencomplexionen unterbrochen, das Verfahren, durch vorher zu treffende Vorbereitungen [no. 43, 47], verwickelter gemacht, und die Aufmerksamkeit zwischen zwey Gegenstände verschiedener Art, zwey combinatorisch-verschiedene Elemente, getheilt wird, 2) die einzelnen Factoren der Zahlen-

coefficienten zerstreut vorkommen, auch die Producte aus ihnen erst reducirt werden müssen, 3) die Zahlencoefficienten der Literalproducte aus leichten Regeln sich ergeben, diese Coefficienten ganz reducirt vorläufig zum künftigen Gebrauch in Tafeln sich aufstellen c), mehrere derselben auch bey wiederholter Anwendung (und gerade die am häufigsten vorkommenden) sich leicht auswendig behalten lassen: so ist es unstreitig vortheilhafter, die beyden von einander verschiedenen Elemente, nicht mit einander, sondern eins nach dem andern, zu bestimmen (133).

Als Beleg hierzu kann das von Arbogast [p. 40] nach [no. 47] ausgeführte Beyspiel dienen, welches alle zu

$$\frac{\mathrm{D}^8.\varphi\alpha}{1.2..8} = \frac{\mathrm{D}\varphi\alpha}{1}\,\mathfrak{a}^8\mathrm{A} + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}\,\mathfrak{b}^8\mathrm{B} + \frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}\,\mathfrak{c}^8\mathrm{C} + \text{etc.}$$

gehörige Polynomialgröfsen enthält. Die Combinationslehre kann auf mehrern Wegen jede dieser Gröfsen, z. B. $\frac{\mathrm{D}^4.\beta^4}{1.2.3.4} = \mathfrak{b}^8\mathrm{D}$ auf den Zeiger $\begin{pmatrix} \beta, \gamma, \delta \ldots \iota \\ 1, 2, 3 \ldots 8 \end{pmatrix}$ bezogen, darstellen:

1) Findet man, wenn man etwa alle Classen brauchte, und $\mathfrak{a}^8\mathrm{A}$, $\mathfrak{b}^8\mathrm{B}$, ... hinter einander, aus dem

c) Hierher meine Tafel aller möglichen Literalproducte von 1, 2, 3 ... 10 Factoren, bey denen Wiederholungen verstattet sind, nebst den zugehörigen Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten (*Infin. Dignit. Tab.* VI. *p.* 168, 169). So leicht auch das Auffinden dieser Zahlen an sich ist, so ist doch das blofse Abschreiben derselben aus jener Tafel noch leichter, und kann wenigstens, wenn viel Factoren vorkommen, zu Prüfung der vorher gefundenen Zahlen dienen.

nfange $\iota = \mathfrak{a}\,{}^8A$ nach (7) entwickelte, auch $\mathfrak{d}\,{}^8D$ seiner Ordnung.

2) Läſst sich $\mathfrak{d}\,{}^8D$ auch unmittelbar darstellen.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & 4\,\beta & \beta & \beta & \zeta & {}^5A \\
D & 12\,\beta & \beta & \gamma & \varepsilon & \\
 & 6\,\beta & \beta & \delta & \delta & {}^6B \\
 & 12\,\beta & \gamma & \gamma & \delta & {}^7C \\
 & 1\,\gamma & \gamma & \gamma & \gamma &
\end{array}
$$

Denn weil sich ${}^8D$ in ${}^7C$, ${}^6B$ ${}^5A$ zerlegen läſst (11): so darf man nur ${}^5A = \zeta$ als *Origine* der Classe ${}^8D$ annehmen, und (auf eine ähnliche Art, wie in 11) daraus e Ordnung ${}^6B$, und daraus die Orduung ${}^7C$, und aus eser die ganze Classe ${}^8D$ ableiten; und hinterher die nzelnen Complexionen mit den zugehörigen numerihen oder Polynomialcoefficienten versehen. Endlich

3) Weil (62) $\dfrac{\mathfrak{p}^4 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \mathfrak{d}^8 D = \mathfrak{d}^{4+4} D$, und

$$\mathfrak{d}^{4+4} D$$

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\mathfrak{C}\,\beta^3\,\mathfrak{a}^4\,A + {}^4\mathfrak{B}\,\beta^2\,\mathfrak{b}^4\,B + {}^4\mathfrak{C}\,\beta^1\,\mathfrak{c}^4\,C + {}^4\mathfrak{D}\,\beta^0\,\mathfrak{d}^4\,D$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

kommt

$$D = 4\beta^3\zeta + 6\beta^2\,[2\gamma\varepsilon + \delta^2] + 4\beta \cdot 3\gamma^2\delta + 1\gamma^4$$

ie bey ARBOGAST [*p.* 40]. Diese lezte combinatorihe Zerlegung giebt also, wie gewöhnlich, die Litelproducte mit den zugehörigen numerischen, Binoial- und Polynomial-coefficienten, zusammen.

18. In diesem Anhange habe ich, aus dem so eitläuftigen Felde combinatorischer Veränderungen,

Tafel I. Fortsetzung.

(B) Combinatorisch ausgedrückte Potenzen von p

$$p^1 = a^1 A + a^2 A x + a^3 A x^2 + a^4 A x^3 + \ldots + a^{n+1} A x^n$$

$$p^2 = b^2 B + b^3 B x + b^4 B x^2 + b^5 B x^3 + \ldots + b^{n+2} B x^n$$

$$p^3 = c^3 C + c^4 C x + c^5 C x^2 + c^6 C x^3 + \ldots + c^{n+3} C x^n$$

$$p^4 = d^4 D + d^5 D x + d^6 D x^2 + d^7 D x^3 + \ldots + d^{n+4} D x^n$$

$$p^5 = e^5 E + e^6 E x + e^7 E x^2 + e^8 E x^3 + \ldots + e^{n+5} E x^n$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$p^m = m^m M + m^{m+1} M x^1 + m^{m+2} M x^2 + \ldots + m^{m+n} M x^n$$

(C) Vergleichung der einzelnen Coefficienten in (A, B) gegen einander

$$\beta = p \varkappa 1 = a^1 A = \beta$$

$$\frac{D \cdot \beta^1}{1} = p \varkappa 2 = a^2 A = \gamma$$

$$\frac{D^2 \cdot \beta^1}{1 \cdot 2} = p \varkappa 3 = a^3 A = \delta$$

$$\frac{D^3 \cdot \beta^1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = p \varkappa 4 = a^4 A = \varepsilon$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{D^n \cdot \beta^1}{1 \cdot 2 \ldots n} = p \varkappa (n+1) = a^{n+1} A = \overset{n}{\beta}$$

ZWEYTER ANHANG

EINIGE DERIVATIVE UND COMBINATORISCHE TAFELN.

Tafel I.

Derivativ- und combinatorisch-gezeichnete Polynomialgrößen und ihre Beziehung auf einander

$\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \zeta x^4 + \eta x^5$ etc. $= p$

(A) Derivativ ausgedrückte Potenzen von p

$$p = \beta + \frac{D \cdot \beta}{I} x + \frac{D^2 \cdot \beta}{I \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta}{I \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{D^n \cdot \beta}{I \cdot 2 \ldots n} x^n$$

$$p^2 = \beta^2 + \frac{D \cdot \beta^2}{I} x + \frac{D^2 \cdot \beta^2}{I \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^2}{I \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{D^n \cdot \beta^2}{I \cdot 2 \ldots n} x^n$$

$$p^3 = \beta^3 + \frac{D \cdot \beta^3}{I} x + \frac{D^2 \cdot \beta^3}{I \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^3}{I \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{D^n \cdot \beta^3}{I \cdot 2 \ldots n} x^n$$

$$p^4 = \beta^4 + \frac{D \cdot \beta^4}{I} x + \frac{D^2 \cdot \beta^4}{I \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^4}{I \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{D^n \cdot \beta^4}{I \cdot 2 \ldots n} x^n$$

$$p^5 = \beta^5 + \frac{D \cdot \beta^5}{I} x + \frac{D^2 \cdot \beta^5}{I \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^5}{I \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{D^n \cdot \beta^5}{I \cdot 2 \ldots n} x^n$$

$$p^m = \beta^m + \frac{D \cdot \beta^m}{I} x + \frac{D^2 \cdot \beta^m}{I \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^m}{I \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{D^n \cdot \beta^m}{I \cdot 2 \ldots n} x^n$$

Tafel I. Fortsetzung.

(B) Combinatorische Reductionsformeln (61, 62)

$p^1 = \mathfrak{a}^1 A +$

$p^2 = \mathfrak{b}^2 B +$

$p^3 = \mathfrak{c}^3 C$

$p^4 = \mathfrak{d}^4 D$

$p^5 = \mathfrak{e}^5$

$\vdots$

$p^m =$

(C)

Hindenburgische

$$\mathfrak{m}^{m+n} M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} & {}^m\mathfrak{A}\,\beta^{m-1}\,.\,\mathfrak{a}^n A \\ + & {}^m\mathfrak{B}\,\beta^{m-2}\,.\,\mathfrak{b}^n B \\ + & {}^m\mathfrak{C}\,\beta^{m-3}\,.\,\mathfrak{c}^n C \\ & \vdots \qquad \vdots \\ + & {}^m\mathfrak{N}\,\beta^{m-n}\,.\,\mathfrak{n}^n N \end{array} \quad \begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathfrak{D}^{n-1}\,.\,\gamma}{1.2.3.n-1} \qquad \frac{\mathfrak{D}^{n-2}\,.\,\gamma^2}{1.2..n-2} \qquad \frac{\mathfrak{D}^{n-3}\,.\,\gamma^3}{1.2..n-3} \qquad \frac{\mathfrak{D}^{n}\,.\,\gamma^n}{1.2..n}$$

Exempel zu (D)

Für $m=4$ und $n=6$, ist

$$\frac{\mathfrak{D}^6\,.\,\beta^4}{1.2.3.4} = \mathfrak{d}^{4+6} D = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{D}\,\beta^4 \,.\, \dfrac{\mathfrak{D}^5\,.\,\gamma}{1.2..5} & {}^4\mathfrak{A}\,\beta^3\,.\,\mathfrak{a}^6 A \\ + \dfrac{\mathfrak{D}^2\,\beta^4}{1.2} \,.\, \dfrac{\mathfrak{D}^4\,.\,\gamma^2}{1.2.3.4} & + {}^4\mathfrak{B}\,\beta^2\,.\,\mathfrak{b}^6 B \\ + \dfrac{\mathfrak{D}^3\,\beta^4}{1.2.3} \,.\, \dfrac{\mathfrak{D}^3\,.\,\gamma^3}{1.2.3} & + {}^4\mathfrak{C}\,\beta^1\,.\,\mathfrak{c}^6 C \\ + \dfrac{\mathfrak{D}^4\,\beta^4}{1.2.3.4} \,.\, \dfrac{\mathfrak{D}^2\,.\,\gamma^4}{1.2} & + {}^4\mathfrak{D}\,\beta^0\,.\,\mathfrak{d}^6 D \end{array} \quad \begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Dies ist die erste Evolution in γ, des zweyten Exempels in der folgenden Tafel III. Auf eben die Art werden auch die übrigen Evolutionen in δ, ε, ζ, η, θ, bis zur lezten ganz reducirten, behandelt; wie aus der angeführten Tafel deutlich zu ersehen ist.

Tafel I. Fortsetzung.

$$\beta^2 = p^2 \times 1 = \mathfrak{b}^2 B$$

$$\frac{D \cdot \beta^2}{1} = p^2 \times 2 = \mathfrak{b}^3 B$$

$$\frac{D^2 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2} = p^2 \times 3 = \mathfrak{b}^4 B$$

$$\frac{D^3 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = p^2 \times 4 = \mathfrak{b}^5 B$$

$$\frac{D^n \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \cdot n} = p^2 \times (n+1) = \mathfrak{b}^{n+3} B$$

$$\beta^3 = p^3 \times 1 = \mathfrak{c}^3 C$$

$$\frac{D \cdot \beta^3}{1} = p^3 \times 2 = \mathfrak{c}^4 C$$

$$\frac{D^2 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2} = p^3 \times 3 = \mathfrak{c}^5 C$$

$$\frac{D^3 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = p^3 \times 4 = \mathfrak{c}^6 C$$

$$\frac{D^n \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \cdot n} = p^3 \times (n+1) = \mathfrak{c}^{n+3} C$$

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \cdots \end{pmatrix}$$

Tafel I. Fortsetzung.

(D) Identische Reductionsformeln

derivative (58, III)	combinatorische (61, 62)
Arbogastische	Hindenburgische
$\frac{D^n \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \cdot \cdot n}$	$\mathfrak{m}^{m+n} M$
$=\!=\!=$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \cdots \end{pmatrix}$
$=\!=\!=$	$=\!=\!=$
$D\,\beta^m \cdot \frac{D^{n-1} \cdot \gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n-1}$	${}^m\mathfrak{A}\,\beta^{m-1} \cdot \mathfrak{a}^n A$
$+ \frac{D^2\,\beta^m}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^{n-2} \cdot \gamma^2}{1 \cdot 2 \cdot \cdot n-2}$	$+ {}^m\mathfrak{B}\,\beta^{m-2} \cdot \mathfrak{b}^n B$
$+ \frac{D^3\,\beta^m}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{D^{n-3} \cdot \gamma^3}{1 \cdot 2 \cdot \cdot n-3}$	$+ {}^m\mathfrak{C}\,\beta^{m-3} \cdot \mathfrak{c}^n C$
$\vdots \qquad \vdots$	$\vdots \qquad \vdots$
$+ \frac{D^n\,\beta^m}{1 \cdot 2 \cdot \cdot n} \cdot \gamma^n$	$+ {}^m\mathfrak{N}\,\beta^{m-n} \cdot \mathfrak{n}^n N$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \end{pmatrix}$$

Exempel zu (D)

Für $m=4$ und $n=6$, ist

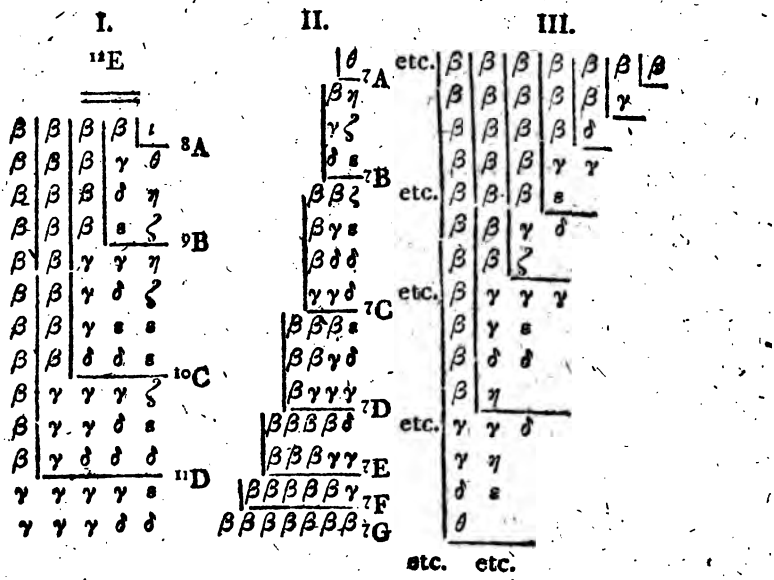
$\frac{D^6 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$\mathfrak{d}^{4+6} D$
$=\!=\!=$	$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{pmatrix}$
$=\!=\!=$	$=\!=\!=$
$D\,\beta^4 \cdot \frac{D^5 \cdot \gamma}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 5}$	${}^4\mathfrak{A}\,\beta^3 \cdot \mathfrak{a}^6 A$
$+ \frac{D^2\,\beta^4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^4 \cdot \gamma^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$+ {}^4\mathfrak{B}\,\beta^2 \cdot \mathfrak{b}^6 B$
$+ \frac{D^3\,\beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{D^3 \cdot \gamma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$+ {}^4\mathfrak{C}\,\beta^1 \cdot \mathfrak{c}^6 C$
$+ \frac{D^4\,\beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{D^2 \cdot \gamma^4}{1 \cdot 2}$	$+ {}^4\mathfrak{D}\,\beta^0 \cdot \mathfrak{d}^6 D$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Dies ist die erste Evolution in γ, des zweyten Exempels in der folgenden Tafel III. Auf eben die Art werden auch die übrigen Evolutionen in δ, ε, ζ, η, θ, bis zur lezten ganz reducirten, behandelt; wie aus der angeführten Tafel deutlich zu ersehen ist.

Tafel II.

Verschiedene, arithmographische und lexikographische Darstellungen combinatorischer Deductionen oder Derivationen, die von einem bestimmten Anfange (*Origine*) ausgehen



$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \vartheta & \iota & \varkappa \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Tafel II. Fortsetzung.

IV.	V.
$\beta^{n-1}[\beta]$	β^7
$\beta^{n-2}[\gamma]$	$\beta^5\gamma$
$\beta^{n-3}[\delta]$	$\beta^3\gamma^2$
$\beta^{n-4}[\gamma^2, \varepsilon]$	$\beta\gamma^3$
$\beta^{n-5}[\gamma\delta, \zeta]$	$\beta^4\delta$
$\beta^{n-6}[\gamma^3, \gamma\varepsilon, \delta^2, \eta]$	$\beta^2\gamma\delta$
$\beta^{n-7}[\gamma^2\delta, \gamma\zeta, \delta\varepsilon, \theta]$	$\gamma^2\delta$
$\beta^{n-8}[\gamma^4, \gamma^2\varepsilon, \gamma\delta^2, \gamma\eta, \delta\zeta, \varepsilon^2, \iota]$	$\beta\delta^2$
	$\beta^3\varepsilon$
$\beta^{n-9}[\gamma^3\delta, \gamma^2\zeta, \gamma\delta\varepsilon, \gamma\theta, \delta^3, \delta\eta, \varepsilon\zeta, \varkappa]$	$\beta\gamma\varepsilon$
	$\delta\varepsilon$
$\beta^{n-10}[\gamma^5, \gamma^3\varepsilon, \gamma^2\delta^2, \gamma^2\eta, \gamma\delta\zeta, \gamma\varepsilon^2, \gamma\iota, \delta^2\varepsilon, \delta\theta, \varepsilon\eta, \zeta^2, \lambda]$	$\beta^2\zeta$
	$\gamma\zeta$
	$\beta\eta$
etc. etc. etc.	θ

Man vergleiche,
wegen I (Sml. I. S. 187, 188);
wegen II (Sml. I. S. 183. §. 42);
wegen III (Sml. I. S. 183; Sml. II. S. 17);
wegen IV (Sml. I. S. 202, 280, 281; Sml. II. S. 17)
wegen V (Sml. I. S. 183; Sml. II. S. 18).

Tafel III.

Zwey derivativ-evolvirte und vollständig reducirte ARBOGASTISCHE Beyspiele.

(A) Erstes Schema. (B) Zweytes Schema.

(Man sehe die grofse Tafel S. 337.)

Nachricht wegen Tafel III.

Diese Tafel, die hier unmittelbar nach Tafel II folgen sollte, läuft zu sehr in die Breite aus, als dafs sie hier hätte Platz finden können. Sie ist daher, auf einem halben Bogen abgedruckt, ganz zu Ende der Schrift, nach Seite 336, geliefert worden, und kann, gehörig zusammen gebrochen, von dem Buchbinder, als Seite 337, eingebunden werden.

Tafel IV. Coefficienten der

Vierter Coefficient des Pro-

Die Arbogastische Darstellung (A) ist auch involutorisch, wie die Winkel nachweisen. Zählt man in A und C die Complexionen nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3 . . . 20, von oben herunter, so stimmen die Complexionen

1 in C vorwärts; von der Linken nach der Rechten
20 in A rückwärts; - - Rechten - - Linken

---

2 in C vorwärts, von der Linken nach der Rechten
19 in A rückwärts; - - Rechten - - Linken

u. s. w. gelesen, vollkommen zusammen. Die Winkel befassen dieselben Buchstaben; nur die Alphabete sind verschieden, worauf bey der Involution nichts ankommt (121). Die Anfänge (*Origines*) von (A) und (C) sind hier D und δ.

ıfange $\iota = \mathfrak{a}\,{}^8A$ nach (7) entwickelte, auch $\mathfrak{d}\,{}^8D$ seiner Ordnung.

2) Läſst sich $\mathfrak{d}\,{}^8D$ auch unmittelbar darstellen.

$$
\begin{array}{rr|c|c|c|l}
 & 4\ \beta & \beta & \beta & \zeta & {}^5A \\
D & 12\ \beta & \beta & \gamma & \varepsilon & \\
 & 6\ \beta & \beta & \delta & \delta & {}^6B \\
 & 12\ \beta & \gamma & \gamma & \delta & {}^7C \\
 & 1\ \gamma & \gamma & \gamma & \gamma &
\end{array}
$$

Denn weil sich ${}^8D$ in ${}^7C$, ${}^6B$ ${}^5A$ zerlegen läſst (11): so darf man nur ${}^5A = \zeta$ als *Origine* der Classe ${}^8D$ annehmen, und (auf eine ähnliche Art, wie in 11) daraus ɜ Ordnung ${}^6B$, und daraus die Orduung ${}^7C$, und aus ɜser die ganze Classe ${}^8D$ ableiten; und hinterher die ızelnen Complexionen mit den zugehörigen numerihen oder Polynomialcoefficienten versehen. Endlich

3) Weil (62) $\dfrac{D^4 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \mathfrak{d}^8 D = \mathfrak{d}^{4+4} D$, und

$$\mathfrak{d}^{4+4} D$$

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\beta^3\,\mathfrak{a}^4\,A + {}^4\mathfrak{B}\,\beta^2\,\mathfrak{b}^4\,B + {}^4\mathfrak{C}\,\beta^1\,\mathfrak{c}^4\,C + {}^4\mathfrak{D}\,\beta^0\,\mathfrak{d}^4\,D$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

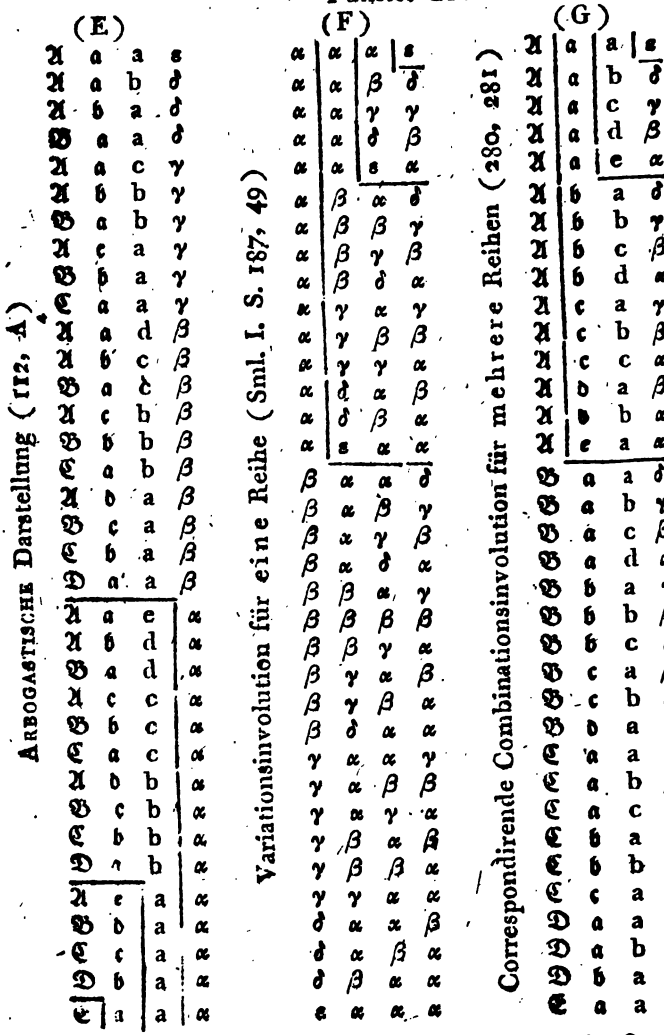
kommt

$$D = 4\beta^3\zeta + 6\beta^2\,[2\gamma\varepsilon + \delta^2] + 4\beta \cdot 3\gamma^2\delta + 1\gamma^4$$

ie bey ARBOGAST [p. 40]. Diese lezte combinatorihe Zerlegung giebt also, wie gewöhnlich, die Litelproducte mit den zugehörigen numerischen, Binoial- und Polynomial-coefficienten, zusammen.

18. In diesem Anhange habe ich, aus dem so eitläuftigen Felde combinatorischer Veränderungen,

Tafel IV. Coefficienten der



Was (S. 330) von den Complexionen, 1 in C und 20 in A; von 2 in C und 19 in A; u. s. w. erinnert worden ist, gilt hier, von 1 in G und 35 in E; von 2 in G und 34 in E; u. s. w. Die Anfänge (*Origines*) von (E) und (G) sind hier € und ε.

rodncte mehrerer Reihen.

ucts der Reihen p, q, r, s, das ist ^{srpq}D (124)

(H) Darstellung von ^{srqp}D, nach Anfange- und Endbuchstaben geordnet (S. 331)

(H)					(H*)
$\mathfrak{A}aaa$,	$\mathfrak{A}ab\delta$,	$\mathfrak{A}ac\gamma$,	$\mathfrak{A}ad\beta$, $\mathfrak{A}ae\alpha$,	das ist	$\mathfrak{A}a$ (a ε, b δ, c γ, d β, e α)
$\mathfrak{A}ba\delta$,	$\mathfrak{A}bb\gamma$,	$\mathfrak{A}bc\beta$,	$\mathfrak{A}bd\alpha$,	- -	$\mathfrak{A}b$ (a δ, b γ, c β, d α)
$\mathfrak{A}ca\gamma$,	$\mathfrak{A}cb\beta$,	$\mathfrak{A}cc\alpha$,		- -	$\mathfrak{A}c$ (a γ, b β, c α)
$\mathfrak{A}da\beta$,	$\mathfrak{A}db\alpha$,			- -	$\mathfrak{A}d$ (a β, b α)
$\mathfrak{A}ea\alpha$,				- -	$\mathfrak{A}e$ (a α)
$\mathfrak{B}aa\delta$,	$\mathfrak{B}ab\gamma$,	$\mathfrak{B}ac\beta$,	$\mathfrak{B}ad\alpha$,	- -	$\mathfrak{B}a$ (a δ, b γ, c β, d α)
$\mathfrak{B}ba\gamma$,	$\mathfrak{B}bb\beta$,	$\mathfrak{B}bc\alpha$,		- -	$\mathfrak{B}b$ (a γ, b β, c α)
$\mathfrak{B}ca\beta$,	$\mathfrak{B}cb\alpha$,			- -	$\mathfrak{B}c$ (a β, b α)
$\mathfrak{B}da\alpha$,				- -	$\mathfrak{B}d$ (a α)
$\mathfrak{C}aa\gamma$,	$\mathfrak{C}ab\beta$,	$\mathfrak{C}ac\alpha$,		- -	$\mathfrak{C}a$ (a γ, b β, c α)
$\mathfrak{C}ba\beta$,	$\mathfrak{C}bb\alpha$,			- -	$\mathfrak{C}b$ (a β, b α)
$\mathfrak{C}ca\alpha$,				- -	$\mathfrak{C}c$ (a α)
$\mathfrak{D}aa\beta$,	$\mathfrak{D}ab\alpha$,			- -	$\mathfrak{D}a$ (a β, a α)
$\mathfrak{D}ba\alpha$,				- -	$\mathfrak{D}b$ (a α)
$\mathfrak{E}aa\alpha$,				- -	$\mathfrak{E}a$ (a α)

Man vergleiche S. 331. Die in (H*) nach $\mathfrak{A}a$ folgenden, vertical unter einander stehenden $(\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)$ und $(\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}a)$ u. s. w. mit ihren Nebenfactoren, geben die Formel durch lauter zweyte Classen (128. S. 286).

Tafel IV. Fortsetzung.

Coefficienten von Producten gegebener Reihen, durch willkührliche Producte der einzelnen ausgedrückt

Für p q r s t u v w x y = p . q r . s t u . v w x y nämen folgende Reihen (118) mit den überschriebenen Zeigerzahlen

$$\overset{1}{\alpha} + \overset{2}{\beta}\,x + \overset{3}{\gamma}\,x^2 + \overset{4}{\delta}\,x^3 + \text{etc.} = M$$

$$\overset{rq}{{}^2B} + \overset{rq}{{}^3B}\,x + \overset{rq}{{}^4B}\,x^2 + \overset{rq}{{}^5B}\,x^3 + \text{etc.} = N$$

$$\overset{uts}{{}^3C} + \overset{uts}{{}^4C}\,x + \overset{uts}{{}^5C}\,x^2 + \overset{uts}{{}^6C}\,x^3 + \text{etc.} = O$$

$$\overset{yxwv}{{}^4D} + \overset{yxwv}{{}^5D}\,x + \overset{yxwv}{{}^6D}\,x^2 + \overset{yxwv}{{}^7D}\,x^3 + \text{etc.} = P$$

Die Reihen N, O, P sind von denen in (115) blos durch die Coefficienten verschieden, so, dafs statt der dortigen einzelnen Buchstaben, hier ganze Classen stehen, die also auch bey Formirung des Products M N O P statt jener einfachen Buchstaben zu setzen sind.

Das führt auf Producte von Classen und ihre Involution, wovon bereits in (131) beyläufig Erwähnung geschehen ist. Auf diesem Wege ergeben sich auch die aus der figürlichen Darstellung abgeleiteten Formeln (123, I, II; 124) und andere ähnliche, von aller figürlichen Anordnung unabhängig. Die combinatorischen Veränderungen führen oft auf solche Anordnungen, die nicht selten Veranlassung zu mannichfaltigen Beobachtugen über die Zusammensetzung der Gröfsen aus ihren Elementen geben (*Inf. Dign.* §. X. *p.* 17, 18, 19 *seq*). Die daraus abgeleiteten, besonders rein-combinatorischen, Darstellungen befolgen gewöhnlich die einfachsten und leichtesten Gesetze.

:hung der derivativen und combinatorischen ;elung der Producte zweyer oder mehrerer Polynomien in Reihen.

:se läſst sich hier, nach dem, was über jede :rs (S. 268—275 und S. 276—287, und in die- hange Taf. IV) beygebracht worden ist, in der larstellen. Ein einziges Beyspiel wird darzu inreichend seyn. Ich wähle hier das ARBOGA- (S. 278):

Glied des Products der dortigen vier Polyno- ler $\frac{D^4.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{a}\alpha)}{1.2.3.4}$, *unabhängig von den vorher- gehenden Gliedern zu entwickeln.*

)urch analytische Derivationen.

n Glied des Products dieser Reihen zu ent- muſs man die Werthe von $\frac{D^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{a}.\alpha)}{1.2..n}$ 73], von $\frac{D^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}.\mathfrak{a})}{1.2..n}$ [108. S. 272], und [106. S. 270], vor Augen haben. Die De- inzelnen Buchstaben α, a, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}$, die hier- ommen, machen keine Schwierigkeit. $\frac{D^m.\alpha}{1.2..m} = \overset{m}{\alpha}$, dem mten Buchstaben 269]; und so auch bey den übrigen $\mathfrak{A}$, und andern.

lung von $\frac{D^4.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{a}.\alpha)}{1.2.3.4}$, wo also

el [illegible] $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{a}.\alpha)}{n}$ wird.

$\mathfrak{A}$ [illegible]

$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{a})$ und (α) zerlegt. Dies giebt eine erste Entwickelung (S. 275).

II. Durch die Formel für $\frac{D^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}.\mathfrak{a})}{1.2..n}$ werden die Derivirten von $(\mathfrak{A}\mathfrak{a}.\mathfrak{a})$, die (I) gegeben, weiter in Derivirte von $(\mathfrak{A}\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{a})$ zerlegt. Diese geben, mit den zugehörigen Derivirten von (α) in (I), eine zweyte Entwickelung (Ebend.).

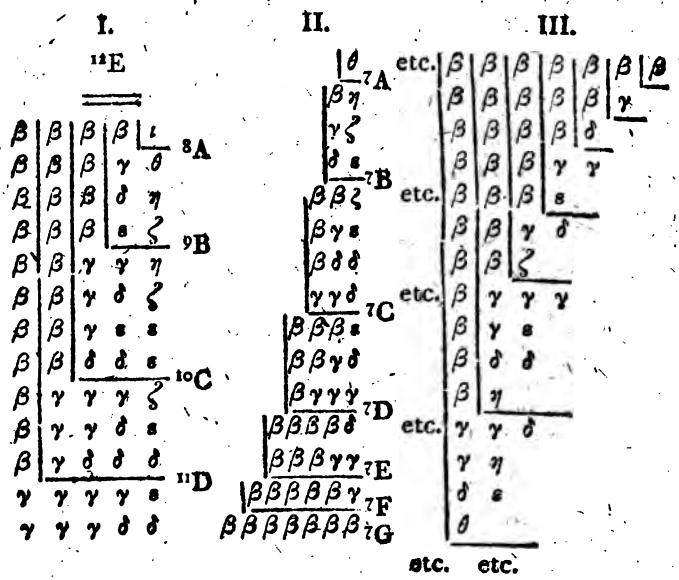
III. Durch die Formel für $D^n.(\mathfrak{A}.\mathfrak{a})$ werden eben so die Derivirten von $(\mathfrak{A}\mathfrak{a})$, die (II) gegeben, weiter in Derivirte von $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{a})$ zerlegt. Diese geben, mit den zugehörigen Derivirten von (a) und (α) aus (II, I), eine dritte Entwickelung (Ebend.).

IV. Die Derivirten in (III), da sie sämmtlich einzelne Buchstaben betreffen, lassen sich augenblicklich auflösen (1), und so giebt die vierte Entwickelung das so genannte *Développement réduit* in Buchstaben (Ebend. der Werth für A_4, unten).

3. Man kann die Aehnlichkeit nicht verkennen, die das Verfahren (in 2) mit jenen ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Entwickelungen der Polynomialgröfsen hat; auch lassen sich die successiven Zerlegungen der Glieder von Producten eben so in einer Tafel darstellen, wie die der Polynomialgröfsen bey Arbogast [*p.* 20, 21 und hier Taf. III]. Nur giebt es für die Glieder der Producte weit mehr verschiedene Zerlegungen, als für die Glieder der Potenzen, wo mehrere gleiche durch numerische Coefficienten zusammengenommen werden. Den Gang der Sache tabellarisch vorzulegen, um solchen mit der eben angeführten Tafel vergleichen zu können, will ich die successive Zerlegung einer Derivirten von einer niedrigern Ordnung z. B. $\frac{D^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{a}.\alpha)}{1.2}$ hier nachweisen; auch, zu Verkürzung im Schreiben, die Distanzexponenten dabey mit einführen (1).

Tafel II.

Verschiedene, arithmographische und lexikographische Darstellungen combinatorischer Deductionen oder Derivationen, die von einem bestimmten Anfange (*Origine*) ausgehen



$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \vartheta & \iota & \varkappa \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Die lezte reducirte Evolution giebt hier die Glieder, wie sie für C (109) stehen, von meiner combinatorischen Darstellung (120) blos in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, verschieden. Man sehe die Bemerkungen zu Taf. IV. (S. 326), wo zugleich die wechselseitige Beziehung beyder Anordnungen nachgewiesen worden ist.

5. Die derivative Entwickelung von $\frac{D^4.(\mathfrak{A}aa\alpha)}{1.2.3.4}$, wenn man sie von vorhergehenden niedrigern Derivirten von $\mathfrak{A}aa\alpha$ unabhängig darstellen soll, wie hier gefordert worden, ist verwickelt, ob sie schon (in 112) von Arbogast für leicht ausgegeben wird. Nämlich die Operationen, die man zu machen hat, sind nicht schwer, führen aber gleichwohl (wegen der als Vorbereitung nöthigen Zerlegungen der gegebenen $\frac{D^4.(\mathfrak{A}aa\alpha)}{1.2.3.4}$, zu Derivirten von $\mathfrak{A}aa$ und α, und eben so der Derivirten von $\mathfrak{A}aa$ zu Derivirten von $\mathfrak{A}a$ und a) in Weitläuftigkeit, wie man (a. a. O. S. 275) ersehen kann. Hierzu kommt noch die Aufmerksamkeit, die man auf die Einschachtelungen (*emboîtemens*) zu verwenden hat, die schon (109) sind empfohlen worden, und allerdings zu Verkürzung des Vortrags das ihrige beytragen.

B) Durch ganz einfache Combinationen.

6. Die combinatorische Entwickelung von $\frac{D^4.(\mathfrak{A}aa\alpha)}{1.2.3.4}$ (Taf. IV, G), deren erstes Glied $\mathfrak{A}aas$ ist, befolgt die (120) gegebene Regel, die ganz allgemein für jede Entwickelung jeder Derivirten gilt. Für hohe Derivirte und viel Buchstaben (d. i. für späte Glieder von Producten mehrerer Reihen) hat man nämlich die Regel nur öfter und weiter anzuwenden, sie bleibt aber *immer* in ihren Vorschriften einfach und in der Anwen-

dung leicht. Man hat nur mehr zu schreiben, weil das Ganze mehr Glieder hat; das Verfahren bleibt aber durchaus sich immer gleichförmig. Man hat nichts dabey, blos etwa als Vorbereitung zu schreiben, die nur dazu diente, die Entwickelung daraus abzuleiten (5); was man schreibt, gehört unmittelbar zur Sache selbst und macht einen Theil des Ganzen aus. Das Verfahren ist zum Theil stelegraphisch, und stellt die Glieder in lexikographischer Ordnung auf. Die gezogenen Winkel, bey diesen involutorischen Anordnungen, dienen, aufser der leichtern Ausübung der Regel, auch noch dazu: einmal, die Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. der weniger zusammengesezten Glieder aus weniger Reihen, als Evolutionen sogleich abzusondern und auszuheben; und dann auch, um die gemeinschaftlichen Factoren, die sich hier von selbst ergeben, sogleich zu übersehen, wofür (109) die Aufmerksamkeit auf die *Emboîtemens* empfohlen worden.

7. Das combinatorische Verfahren in (B) ist dem derivativen in (A) gerade entgegengesezt. Das leztere geht, von mehrbuchstäbigen Derivirten und ihren Zerlegungen, auf die Zerlegungen der successive weniger-buchstäbigen Derivirten fort; das erstere sezt aus der zuerst gegebenen Union, die Bionen, aus diesen die Ternionen, aus diesen die Quaternionen u. s. w. von immer mehrern und mehrern Reihenbuchstaben, zusammen. Man wird keinen Augenblick anstehen, die combinatorisch-synthetische Auflösung (B), als die leichtere, der derivativ-analytischen (A) vorzuziehen. Vertauscht man in der reducirten Evolution der tabellarischen Vorstellung (3) die Alphabete α, a, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}\ \mathrm{a}\ \alpha$ und liest die so umgeformten Complexionen rückwärts von unten herauf, so hat man, aus der derivativen Darstellung der Glieder, auf einmal die stelegraphisch-lexikographische Anordnung (*120 und Taf. IV.*). Die Umtauschung ist nur nöthig,

wenn die Anfangscomplexion (wie in 126) $\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}\ \gamma$ seyn soll, sonst besteht auch die lexikographisch-combinatorische Darstellung, ohne jene Umtauschung, aber für die Anfangscomplexion $\alpha\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{C}$ (Ebend.), die man eben so gut als $\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}\ \mathfrak{a}\ \gamma$ zur Anfangscomplexion für das verlangte Glied hätte nehmen können.

So lassen sich auch, auf dergleichen Producte oder Potenzen der Reihen und ihre Glieder sich beziehende, zusammengesetztere derivative Functional-Ausdrücke und Sätze [*Calc. des Der. p.* 46 — 68; 78 — 89] durch combinatorische Zeichnung in ihrer Entwickelung sehr erleichtern; die Auflösung von Aufgaben hingegen, deren Inhalt so ganz offenbar combinatorisch ist, wie die [a. a. O. no. 93] auf directen combinatorischen Wegen zugleich beträchtlich abkürzen. Die dort angebrachte für merkwürdig angegebene derivative Bezeichnung führt doch zu Weitläuftigkeiten, von denen die kurze, der Natur der Aufgabe angemessene, combinatorische Behandlung nichts weis. Auch wird man, bey etwas verwickelten Aufgaben und ihrer derivativen Behandlung, bestätiget finden, was ich bey einer andern Gelegenheit anderwärts schon erinnert habe; dafs man nämlich bey derivativen Vorschriften, die man nicht immer auszuüben Veranlassung hat, sehr oft einen grofsen Theil des Vorhergehenden aufmerksam überlesen mufs, ehe man mit Sicherheit zur Anwendung auf den vorkommenden Fall schreiten kann. Mit den combinatorischen Formen und Formeln hingegen, deren Einrichtung und Entwickelung man bald übersieht, und wenn man sie vergessen hätte, durch Nachlesung weniger Zeilen sich wieder erneuert, ist das nicht der Fall.

---

lynomialgröfse $\frac{D^5}{1.2}$

Evolution, in ζ

$D \cdot \zeta$

$\frac{\beta^4}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} D\gamma^2 \cdot \zeta \\ + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} \cdot D\delta^2 \end{matrix} \right.$

$=$

$\frac{\beta^4}{3} \cdot \left\{ \begin{matrix} D\gamma^3 \cdot \varepsilon \\ + \frac{D^2\gamma^3}{1.2} \cdot \delta^2 \end{matrix} \right.$

$\frac{\beta^4}{3.4} \cdot D\gamma^4 \cdot \delta$

lynomialgröfse $\frac{D^6}{1.2}$

4te Evolution, in

$\frac{D^2 \cdot \zeta}{1.2}$

$\cdot \left\{ \begin{matrix} D\gamma^2 \cdot D \cdot \zeta \\ + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} \cdot \left\{ \begin{matrix} D \\ + \end{matrix} \right. \end{matrix} \right.$

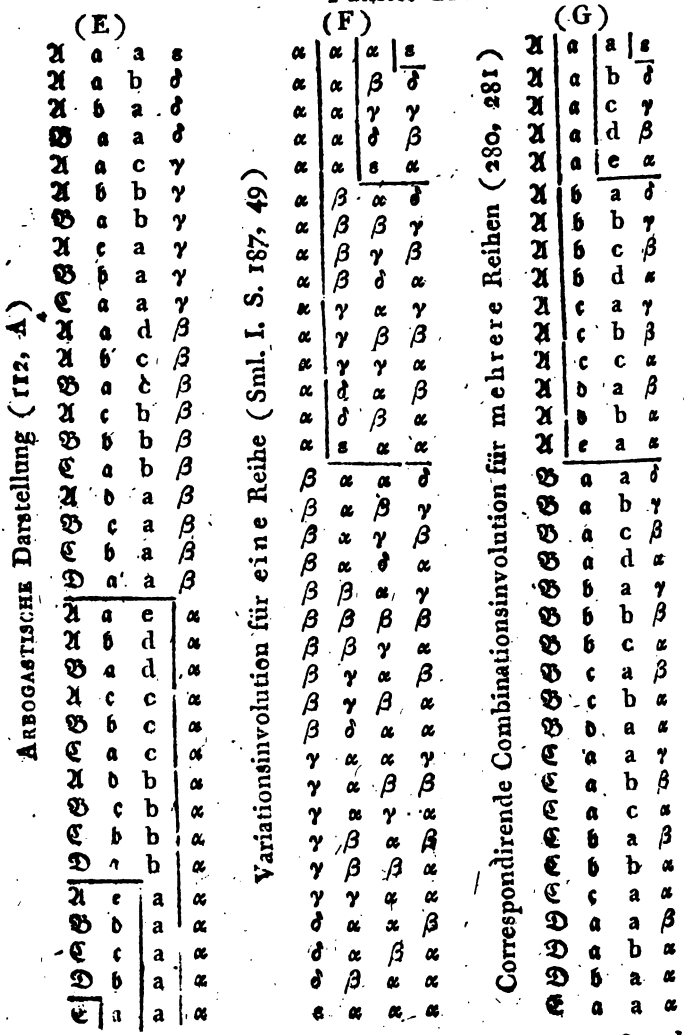
$\frac{4}{3} \cdot \left\{ \begin{matrix} D\gamma^3 \cdot \zeta \\ + \frac{D^2\gamma^3}{1.} \cdot D \\ + \frac{D^3\gamma^3}{1.2.3} \cdot \delta \end{matrix} \right.$

$\frac{4}{4} \cdot \left\{ \begin{matrix} D\gamma^4 \cdot \varepsilon \\ + \frac{D^2\gamma^4}{1.2} \cdot \delta \end{matrix} \right.$

die 6ste hier übergan

Tafel IV. Coefficienten der

Fünfter Coefficient des Pro-



Was (S. 330) von den Complexionen, 1 in C und 20 in A; von 2 in C und 19 in A; u. s. w. erinnert worden ist, gilt hier, von 1 in G und 35 in E; von 2 in G und 34 in E; u. s. w. Die Anfänge (Origines) von (E) und (G) sind hier € und ε.

Prodncte mehrerer Reihen.

ducts der Reihen p, q, r, s, das ist ^{srpq}D (124)

(H) Darstellung von ^{srqp}D, nach Anfangs- und Endbuchstaben geordnet (S. 331)

(H)						(H*)
$\mathfrak{A}aaa$,	$\mathfrak{A}ab\delta$,	$\mathfrak{A}ac\gamma$,	$\mathfrak{A}ad\beta$,	$\mathfrak{A}ae\alpha$,	das ist	$\mathfrak{A}a$ (a ε, b δ, c γ, d β, e α)
$\mathfrak{A}ba\delta$,	$\mathfrak{A}bb\gamma$,	$\mathfrak{A}bc\beta$,	$\mathfrak{A}bd\alpha$,		- -	$\mathfrak{A}b$ (a δ, b γ, c β, d α)
	$\mathfrak{A}ca\gamma$,	$\mathfrak{A}cb\beta$,	$\mathfrak{A}cc\alpha$,		- -	$\mathfrak{A}c$ (a γ, b β, c α)
		$\mathfrak{A}da\beta$,	$\mathfrak{A}db\alpha$,		- -	$\mathfrak{A}d$ (a β, b α)
			$\mathfrak{A}ea\alpha$,		- -	$\mathfrak{A}e$ (a α)
$\mathfrak{B}aa\delta$,	$\mathfrak{B}ab\gamma$,	$\mathfrak{B}ac\beta$,	$\mathfrak{B}ad\alpha$,		- -	$\mathfrak{B}a$ (a δ, b γ, c β, d α)
	$\mathfrak{B}ba\gamma$,	$\mathfrak{B}bb\beta$,	$\mathfrak{B}bc\alpha$,		- -	$\mathfrak{B}b$ (a γ, b β, c α)
		$\mathfrak{B}ca\beta$,	$\mathfrak{B}cb\alpha$,		- -	$\mathfrak{B}c$ (a β, b α)
			$\mathfrak{B}da\alpha$,		- -	$\mathfrak{B}d$ (a α)
		$\mathfrak{C}aa\gamma$,	$\mathfrak{C}ab\beta$,	$\mathfrak{C}ac\alpha$,	- -	$\mathfrak{C}a$ (a γ, b β, c α)
			$\mathfrak{C}ba\beta$,	$\mathfrak{C}bb\alpha$,	- -	$\mathfrak{C}b$ (a β, b α)
				$\mathfrak{C}ca\alpha$,	- -	$\mathfrak{C}c$ (a α)
			$\mathfrak{D}aa\beta$,	$\mathfrak{D}ab\alpha$,	- -	$\mathfrak{D}a$ (a β, a α)
				$\mathfrak{D}ba\alpha$,	- -	$\mathfrak{D}b$ (a α)
				$\mathfrak{E}aa\alpha$,	- -	$\mathfrak{E}a$ (a α)

Man vergleiche S. 331. Die in (H*) nach $\mathfrak{A}a$ folgenden, vertical unter einander stehenden $(\mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a)$ und $(\mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}a)$ u. s. w. mit ihren Nebenfactoren, geben die Formel durch lauter zweyte Classen (128. S. 286).

S. 141, Note, Z. 3, v. u. st. Zahlencolonne, l. Zahlencolonnen

— 147, Z. 23, st. au- eine, l. auf eine

Ebend. Z. 34, 35, st. verrschiedenen, l. verschieden

S. 153, Z. 4, v. u. st. combinatorischen, l. combinatorische

— 154, Z. 21, st. erleichtert Der *ocus*, l. erleichtert. Der *locus*

— 159, Z. 3, v. u. st. 2 4 18 6 . . ., l. 2, 4, 8, 16 . . .

— 160, Z. 3, v. u. st. $n-4$, l. $n-4$, und

— 62, Z. 1, st. $n-4$, l. $n-4'$

— 181, Z. 2, v. u. st. $\mathrm{D}.\mathrm{F}\alpha.=\mathrm{D}.\alpha$, l. $\mathrm{D}.\mathrm{F}\alpha.\mathrm{D}.\alpha$

— 183, Z. 7, v. u. st. $\mathrm{D}^2.\varphi\alpha$, l. $\mathrm{D}^2\varphi\alpha$

— 187, Z. 3, st. $1\,2.3\delta$, l. $1.2.3\delta$

— 190, Z. 2, st. $\mathrm{D}.\varphi\alpha$, l. $\mathrm{D}.\varphi\alpha$,

— 193, Z. 10, nach $\frac{m.m-1}{1.2}\ldots$, fehlt x^{m-2}

— 201, Z. 3, v. u. st. $\alpha-.\zeta$, l. $\alpha-1.\zeta$

— 219, Z. 4, v. u. st. $\left(\frac{\mathrm{D}^n.\varphi\alpha}{1.2..n}\right)=\frac{\mathrm{D}\varphi\alpha}{1}$ l.

$$\left(\frac{\mathrm{D}^n.\varphi\alpha}{1.2..n}\right)x^n=\left(\frac{\mathrm{D}\varphi\alpha}{1}\ldots\right.$$

— 231, Z. 1, v. u. st. $\left(\frac{\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\ldots}{1,3,3,4\ldots}\right)$ l. $\left(\frac{\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\ldots}{1,2,3,4\ldots}\right)$

— 235, Z. 12, st. $5\beta^2.[\ldots\gamma\zeta+2\delta\varepsilon$, l. $6.\beta^2[2\gamma\zeta+2\delta\varepsilon]$

Ebend. Z. 13. st. $+\gamma^3\delta$, l. $+4\gamma^3\delta$

S. 37[illegible], v. u. st. $\alpha,\beta,\gamma\ldots$, l. $\alpha,\beta,\gamma\ldots\theta$

Ebend. Z. 20, st. derivaiive, l. derivative

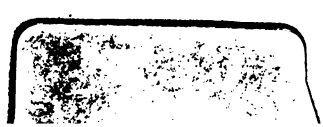
S. 259, Z. 4, und S. 260, Z. 2, v. u. sollten statt der geradestehenden Π, schiefliegende gesezt seyn, dergleichen aber in der Druckerey nicht vorhanden waren.

— 267, Z. 10, st. $q^{s+gx(n+1)}$, l. $q^{f+gx(n+1)}$

Ebend. Z. 15, st. der unendlichen, l. der endlichen

S. 273, Z. 5, st. $\mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}$, l. $\mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\mathfrak{a})$

— 275, Z. 5, v. u. st. $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ l. $\mathfrak{B}\mathfrak{a}$ und Z. 4, v. u. st. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, l. $\mathfrak{A}\mathfrak{b}$

— 284, Z. 14, st. gezahlt, l. gezählt

Im Bogen T sind aus Verschen, von Seite 295 an bis mit Seite 304, die schiefstehenden Variationsclassenbuchstaben *A, B, C, D, E, F . . . M . . . P, Q* statt der geradestehenden Combinationsclassenbuchstaben A, B, C, D, E, F . . . M . . . P, Q gesetzt worden.